INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXII. BAND DRITTES HEFT 1954

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 11.60

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig**, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43
Professor Dr.-Ing. K. Klotter, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Rittnertstr. 12
Professor K. v. Sanden, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. E. Schmidt, Technische Hochschule, München, Walter-von-Dyck-Platz 1
Professor Dr.-Ing. E. Sörensen, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 24 40 u. 54 30

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Vertriebsvertretung im Ausland:
Lange, Maxwell & Springer Ltd. 242 Marylebone Road, London, N.W. 1.

Inhalt:

Seite

Pestel, E., Beitrag zur Ermittlung der hydrodynamischen Dämpfungs- und Federeigenschaften von Gleitlagern. Mit 13 Textabbildungen 147

Berger, E. R., Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung für das kreiszylindrische Rohr 156

Rüdiger, D., Ein Beitrag zum Randstörungsproblem isotroper Kreiszylinderschalen. Mit 2 Textabbildungen 160

Müller, W., Zur Biegungstheorie einer Vierpilzplatte mit rechteckigen Stützflächen. Mit 3 Textabbildungen 163

Dörr, J., Schmiermitteldruck und Randverformungen des Rollenlagers. Mit 24 Textabbildungen 171

Freytag, H., Rechnerischer Ausgleich von Meßkurvenscharen. Mit 3 Textabbildungen 194

Isay, W.-H., Beitrag zur Potentialströmung durch radiale Schaufelgitter. Mit 5 Textabbildungen 203

Bechert, H., Die Berechnung der Kräfteumlagerungen bei einem einfach symmetrischen, in mehreren Lagen vorgespannten Betonbalken infolge Kriechen und Schwinden des Betons. Mit 2 Textabbildungen 211

Kauderer, H., Zur kinetischen Bestimmung der Kennlinie eines nichtlinearen freien Schwingers. Mit 4 Textabbildungen 215

INGENIEUR-ARCHIV

XXII. BAND DRITTES HEFT 1954

Beitrag zur Ermittlung der hydrodynamischen Dämpfungs- und Federeigenschaften von Gleitlagern.

Von E. Pestel.

1. Einleitung. Die Kenntnis der hydrodynamischen Dämpfungs- und Federeigenschaften von Gleitlagern ist wünschenswert für die genaue Ermittlung der kritischen Drehzahlen einer in Gleitlagern laufenden Maschinenwelle und für die Voraussage ihres Verhaltens in der Umgebung einer solchen Drehzahl. Darüber hinaus ist sie aber eine notwendige Voraussetzung für die Beurteilung der Stabilität der rotierenden Welle gegen selbsterregte Schwingungen. Das Auftreten kritischer Wellenstörungen infolge der Nachgiebigkeit des Schmiermittels in Gleitlagern wurde zuerst von *Newkirk* [1] und von *Stodola* [2] erkannt. Letzterer wies auch einen Weg zur Ermittlung der Federeigenschaften des sogenannten Halblagers. Unter Vernachlässigung der Dämpfungseigenschaften dieses Lagers stellte *Stodola* Stabilitätskriterien für die „starre" und später auch für die elastische rotierende Welle auf. Die Arbeiten von *Newkirk* und *Stodola* wurden vor einigen Jahren von *Hagg* [3] aufgegriffen mit dem Ziel, der Praxis zuverlässigere Unterlagen für die rechnerische Vorausbestimmung der Laufstabilität zu liefern.

Da die zahlenmäßige Kenntnis der Dämpfungseigenschaften allein für die Aufstellung des *Routh*schen Stabilitätskriteriums [4] unzureichend ist, wird am Schluß dieser Mitteilung auch das Verfahren zur Bestimmung der Federzahlen des sogenannten 120°-Lagers erläutert, das im wesentlichen auf einer experimentellen Arbeit von *Needs* und deren Auswertung durch *Hagg* unter Benutzung des Grundgedankens der Methode von *Stodola* beruht.

Die Betrachtung des in einem Gleitlager rotierenden Zapfens einer als starr angenommenen, ideal ausgewuchteten, zweifachgelagerten Welle mit waagerechter Achse führt wohl am einfachsten in die dieser Arbeit zugrundeliegende Fragestellung ein. Infolge der Rotation des Zapfens in einem viskosen Schmiermittel kann auch die „starre" Welle gedämpfte Eigenschwingungen ausführen. Bei translatorischer Bewegung der Wellenachse können wir die Masse der Welle auf die beiden Zapfen entsprechend den Auflagerdrücken verteilen und für die Bewegung des Zapfenmittelpunktes, in dem wir uns den entsprechenden Massenanteil m konzentriert vorstellen, folgende Differentialgleichungen aufstellen (Abb. 1).

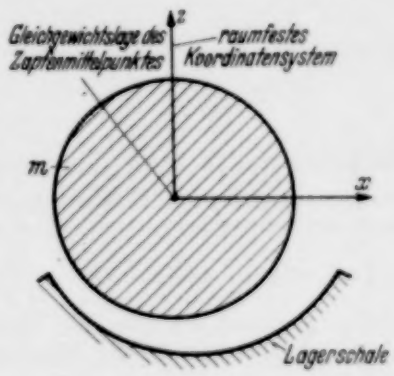

Abb. 1.

$$m\ddot{x} + b_{xx}\dot{x} + b_{xz}\dot{z} + c_{xx}x + c_{xz}z = 0\,, \tag{1a}$$

$$m\ddot{z} + b_{zx}\dot{x} + b_{zz}\dot{z} + c_{zx}x + c_{zz}z = 0\,. \tag{1b}$$

Darin sind die Dämpfungsgrößen b und die Federzahlen c abhängig von der dimensionslosen Lagerkennzahl $G = \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 \frac{\mu n}{p}$, welche die verschiedenen Einflüsse des radialen Lagerspiels δ, des mittleren Lagerdruckes p, der Zähigkeit μ des Schmiermittels und der Drehzahl n/min zusammenfaßt. Die Gleichgewichtslage des rotierenden Zapfens, gekennzeichnet durch die

---

[1] *B. L. Newkirk* u. *H. D. Taylor*, General Electric Review 28 (1925), S. 559.

[2] *A. Stodola*, Schweiz. Bauztg. 85 (1925), S. 265.

[3] *A. C. Hagg*, Trans. A.S.M.E. (1946), A — 211—220. Der Verfasser verdankt *A. C. Hagg* die Anregung zu der im folgenden abgeleiteten Methode für die Berechnung der Dämpfungseigenschaften von Gleitlagern.

[4] Voraussetzung für die Anwendung dieses Kriteriums ist natürlich die Konstanz der Größen b und c in den Differentialgleichungen (1). Im Maschinenbau wird nun bereits das Einsetzen instabilen Verhaltens als unerwünscht betrachtet. Für die Bestimmung der Stabilitätsgrenze ist dann aber die Annahme konstanter b und c in den meisten praktischen Fällen zulässig.

Exzentrizität ε des Zapfenmittelpunktes und den Winkel γ (Abb. 2), ist nämlich eine Funktion von G; wir werden sehen, daß die Gleichgewichtslage die Größe von b und c entscheidend beeinflußt.

2. Rechnerische Ermittlung der Dämpfungseigenschaften. a) Grundlagen des Verfahrens. Die Grundlagen des Verfahrens mögen am Fall des Plattenstreifens der Breite $2a$ erläutert werden, der sich senkrecht zur Zeichenebene nach beiden Seiten ins Unendliche erstreckt und auf einer Schmiermittelschicht gelagert ist, deren Träger eine unendlich große Ebene ist (Abb. 3). Plattenstreifen und Ebene sind einander parallel und werden relativ zueinander längs ihrer Normalen mit endlicher Geschwindigkeit bewegt. Wird dabei die Spalthöhe zwischen Streifen und Ebene verringert, so wird Flüssigkeit seitlich herausgedrückt. Dadurch entsteht in dem Spalt ein längs der Plattenbreite veränderlicher Überdruck gegenüber dem Druck p_0 in der Schmiermittelschicht außerhalb des Plattenstreifens. Bei umgekehrter Bewegungsrichtung, strömt Flüssigkeit in den Spalt ein, und es entsteht ein Sog, der der Vergrößerung der Spalthöhe entgegenwirkt. Somit wird der Energiequelle, welche die Bewegung des Plattenstreifens und der Ebene relativ zueinander hervorruft, während der Bewegung dauernd Energie entzogen. Wir wollen für diese zweidimensionale Strömung den der Geschwindigkeit der Relativbewegung entgegenwirkenden Über- bzw. Unterdruck im Spalt ermitteln.

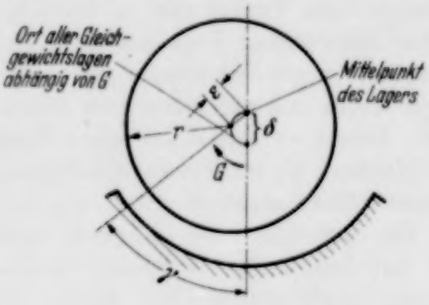

Abb. 2.

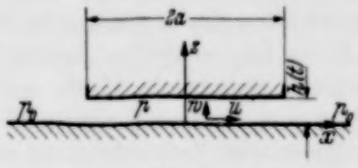

Abb. 3.

Die *Navier-Stokes*schen Gleichungen der zähen Flüssigkeit, mit denen wir den zuvor erörterten Vorgang mathematisch beschreiben können, reduzieren sich auf folgende Form, da die Trägheitsglieder und die übrigen Reibungsglieder gegenüber dem jeweils angegebenen Reibungsglied zurücktreten:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{3a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}. \tag{3b}$$

In jeder der beiden Gleichungen verhält sich das größte der vernachlässigten Glieder zu dem mitgenommenen Reibungsglied größenordnungsmäßig wie

$$Re = \frac{1}{2\nu} \frac{d}{dt}(h^2) = \frac{h\dot{h}}{\nu}.$$

Darin bedeuten h die zeitlich veränderliche Spalthöhe und ν die kinematische Zähigkeit des Schmiermittels. Abschätzungen zeigen, daß Re in praktischen Fällen etwa 0,1 betragen kann.

Zu den Gleichungen (3) für die schleichende Strömung tritt noch die Kontinuitätsgleichung für die inkompressible Flüssigkeit

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

sowie die Randbedingung, daß außerhalb des Spaltes überall der Druck p_0 vorherrscht [1].

Der Ansatz

$$u = x \frac{d(f(z))}{dz}, \quad w = -f(z)$$

erfüllt die Kontinuitätsgleichung. Einsetzen in (3) zeigt, daß der Überdruck $p - p_0$ von folgender Form sein muß:

$$p - p_0 = \mu \frac{\dot{q}(t)}{2} [x^2 + F(z)].$$

[1] Wegen des unbedeutenden Einflusses der Ränder $x = \pm a$ auf das Spaltinnere werden wir uns damit begnügen, die Randbedingung nur für die vier Kanten $x = \pm a$, $z = 0$ und $z = h$ zu erfüllen.

Nach kurzer Rechnung erhalten wir

$$F(z) = -z^2 + C_1 z + C_2 ,$$

$$f(z) = \frac{\varphi(t)}{6} z^3 + K_1 z^2 + K_2 z + K_3 .$$

Zwischen C_1 und K_1 besteht wegen (3b) die Beziehung

$$K_1 = -\frac{\varphi(t)}{4} C_1 .$$

Die Haftbedingung $u = 0$ und $w = 0$ für $z = 0$ ergibt sofort $K_2 = 0$ und $K_3 = 0$, während die Haftbedingung $u = 0$ für $z = h(t)$ liefert

$$K_1 = -\frac{\varphi(t)}{4} h(t) \quad \text{und somit} \quad C_1 = h(t) .$$

Mit Hilfe der Haftbedingung $w = dh/dt$ für $z = h(t)$ erhalten wir schließlich

$$\varphi(t) = 12 \frac{\dot{h}}{h^3} .$$

Das Geschwindigkeitsfeld wird daher durch folgende Geschwindigkeitskoordinaten beschrieben:

$$u = \frac{6\, x\, z^2}{h^3} \cdot \frac{dh}{dt} ; \qquad w = \left[3\left(\frac{z}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{h}\right)^3\right] \frac{dh}{dt} .$$

Der Druckunterschied im Spalt gegenüber den Verhältnissen außerhalb des Spaltes ergibt sich dann wie folgt:

$$p - p_0 = 6\,\mu \frac{x^2 - a^2 + h\, z - z^2}{h^3} \frac{dh}{dt} . \tag{4}$$

Wir erkennen, daß er der Geschwindigkeit dh/dt entgegengesetzt gerichtet ist und daher der Energiequelle, welche die Bewegung erzeugt, Energie entzieht. Der Druckunterschied ist ferner der Geschwindigkeit proportional.

Für unsere weiteren Untersuchungen ist nun wesentlich, daß bis auf eine unbedeutende Randzone in der Umgebung von $x = \pm a$ mit guter Näherung [1]

$$p - p_0 = 6\,\mu \frac{x^2 - a^2}{h^3} \frac{dh}{dt} \tag{4a}$$

gesetzt werden darf. Nun ist aber (4a) gerade der Ausdruck für den Druckunterschied, der sich bei eindimensionaler Behandlung des Problems $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ ergeben hätte. Wir können uns daher im Folgenden bei der Behandlung ähnlicher ebener Probleme auf die eindimensionale Betrachtungsweise beschränken, die die Geschwindigkeitskomponente w gänzlich vernachlässigt und unter Berücksichtigung der Haftbedingung an Stelle der Geschwindigkeitskomponente u durch Mittelbildung in z-Richtung die an jeder Stelle x in x-Richtung strömende Flüssigkeitsmenge q_x einführt. Damit erhält man bekanntlich aus (3a)

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{12\,\mu}{h^3} q_x . \tag{5}$$

Aus Kontinuitätsgründen muß dann $q_x = -x\, dh/dt$ sein. Damit ergibt sich als Lösung für den Druckunterschied die Formel (4a), so daß der Nachweis für die Berechtigung eindimensionaler Betrachtungsweise erbracht ist.

b) Dämpfungseigenschaften des ebenen Gleitschuhes in eindimensionaler Betrachtungsweise. Der ebene Plattenstreifen sei nun gegen die Ebene um den Winkel β geneigt und führe eine translatorische Bewegung mit endlicher Geschwindigkeit längs der Normalen zur Ebene, also in z-Richtung, aus. Dabei bewege sich die Ebene in x-Richtung mit der konstanten Geschwindigkeit U (Abb. 4). Unter der Voraussetzung schleichender Strömung erhalten wir bei eindimensionaler Betrachtungsweise folgende Glei-

[1] Die Formel (4a) gilt sogar (vgl. Fußnote 1 von S. 148) genau für die Ebenen $z = 0$ und $z = h(t)$, auf die es uns ja bei der Ermittlung der Dämpfungseigenschaften des Schmiermittelfilms ankommt.

chung für den Druck p im schrägen Spalt:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 12\,\mu\left(\frac{U}{2\,h^2} - \frac{q_x}{h^3}\right). \tag{6}$$

Darin ist h folgende Funktion von x und t, wenn wir im Hinblick auf die Ermittlung der Dämpfungskonstanten gleich annehmen, daß der Plattenstreifen gegenüber der Ebene x eine periodische Bewegung ausführt:

$$h(x,t) = (a_0 - x)\,\beta + e\sin\omega t = [a(t) - x]\,\beta \quad \text{mit} \quad a(t) = a_0 + \frac{e}{\beta}\sin\omega t\,. \tag{7}$$

Für die Bestimmung von q_x auf Grund der Kontinuitätsbedingung ist die Kenntnis der Stelle ξ der „Wasserscheide" erforderlich, für die $\frac{dp}{dx} = 0$ wird. Dort ist dann entsprechend (6) und (7)

$$q_x(\xi,t) = \frac{U\cdot h\,(\xi,t)}{2} = \frac{U\,[a(t) - \xi]\,\beta}{2}\,.$$

Damit läßt sich q_x wie folgt schreiben:

$$q_x(x,t) = \frac{U\,h\,(\xi,t)}{2} + \dot{h}(\xi - x)\,. \tag{8}$$

Nach kurzer Rechnung erhalten wir als Bestimmungsgleichungen für $h(\xi,t)$ bzw. für ξ

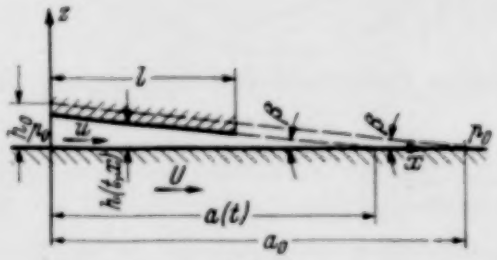

Abb. 4.

$$h(\xi,t) = 2\,\frac{h(0,t)\cdot h(l,t)}{h(0,t) + h(l,t)} \tag{9}$$

bzw.

$$\xi = \frac{a(t)\,l}{2\,a(t) - l}\,.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in (8) läßt sich (6) mit folgendem Ergebnis integrieren:

$$p - p_0 = 12\,\mu\,\frac{U/2 - \dot{a}}{\beta}\left[\frac{h(0,t) - h(x,t)}{h(0,t)\,h(x,t)} - \frac{h(\xi,t)}{2}\,\frac{h^2(0,t) - h^2(x,t)}{h^2(0,t)\,h^2(x,t)}\right].$$

Dieser Ausdruck nimmt nach einigen weiteren Umformungen unter Benutzung von (7) und (9) schließlich folgende Form an:

$$p - p_0 = \frac{12\,\mu(U/2 - \dot{a})}{2\,a\,(t) - l}\,\frac{x(l - x)}{h^2(x,t)}\,. \tag{10}$$

Bei festgehaltenem $h(0,t)$ geht für $a \to \infty$ diese Formel in die für den Druckunterschied bei parallelem Spalt über.

Durch Integration von (10) über die Spaltbreite erhalten wir folgende Gleichung für die Resultierende/Längeneinheit des Druckunterschiedes im Spalt:

$$D(t) = \frac{12\,\mu\,(U/2 - \dot{a})}{\beta^2\,[2\,a\,(t) - l]}\left\{[2\,a(t) - l]\ln\frac{a(t)}{a(t) - l} - 2\,l\right\}. \tag{11}$$

Das Integral

$$E = -\int_0^{2\pi/\omega} D\,\dot{h}\,dt$$

liefert nun den Verlust an mechanischer Energie je Längeneinheit des Plattenstreifens, der bei einer vollen Schwingung entsteht. Unter der Voraussetzung kleiner Schwingungen ergibt sich angenähert

$$E = \frac{12\,\mu}{\beta^3}\left[\ln\left(\frac{a_0}{a_0 - l}\right) - \frac{2\,l}{2\,a_0 - l}\right]\omega\,\pi\,e^2\,. \tag{12}$$

Der bei dieser Integration gemachte Fehler läßt sich durch Mitnahme des nächst höheren Gliedes der bei der Rechnung durchgeführten Reihenentwicklung abschätzen. Dieses beträgt

$$\frac{12\,\mu}{\beta^3}\left\{\frac{1}{8}\left[\frac{1}{(a_0 - l)^2} - \frac{1}{a_0^2}\right] - \frac{2\,l}{(2\,a_0 - l)^3}\right\}\left(\frac{e}{\beta}\right)^2\omega\,\pi\,e^2$$

und kann unter der Voraussetzung kleiner Schwingungen gegenüber (12) als vernachlässigbar klein angesehen werden, weil dann $e/\beta \ll h_0/\beta = a_0$ ist.

Durch Reihenentwicklung von (12) können wir noch folgende Form für die durch Dämpfung verlorene Energie erhalten:

$$E = \frac{\mu\, l^3}{\beta^3\, a_0^3}\left[1 + 1{,}50\frac{l}{a_0} + 1{,}65\left(\frac{l}{a_0}\right)^2 + 1{,}63\left(\frac{l}{a_0}\right)^3 + 1{,}42\left(\frac{l}{a_0}\right)^4 + \cdots\right]\omega\,\pi\,e^2\,, \tag{12a}$$

aus der wir durch den Grenzübergang $a_0 \to \infty$, $\beta \to 0$ und $a_0\,\beta = h_0 =$ konst. den entsprechenden Ausdruck für den parallelen Spalt gewinnen können:

$$E = \frac{\mu\, l^3}{h_0^3}\,\omega\,\pi\,e^2\,. \tag{12b}$$

Unter der Voraussetzung kleiner Schwingungen kann also die Dämpfung entsprechend (12) bzw. (12b) als geschwindigkeitsproportional betrachtet werden. Indem wir die Dämpfungskonstante mit b bezeichnen, ergibt sich der Energieverlust über eine volle Periode zu $E = b\omega\pi e^2$.

Durch Vergleich mit (12) erhalten wir also als Dämpfungskonstante/Längeneinheit für den ebenen Gleitschuh

$$b = \frac{12\,\mu}{\beta^3}\left[\ln\left(\frac{a_0}{a_0 - l}\right) - \frac{2\,l}{2\,a_0 - l}\right] \tag{13}$$

bzw. bei parallelem Spalt

$$b = \frac{\mu\, l^3}{h_0^3}\,. \tag{13b}$$

Wir erkennen, daß die Geschwindigkeit U nicht in die Dämpfungskonstante (13) eingeht. Ihr Einfluß ist nur insofern wesentlich, als bei gegebener Belastung des Gleitschuhes die die Spaltabmessungen bestimmenden Größen a_0 und β von U abhängen. Bei der nun folgenden Berechnung der Dämpfungskonstanten für den im Gleitlager schwingenden Zapfen können wir also von vornherein seine Rotation unberücksichtigt lassen; sie spielt dann lediglich bei der Bestimmung der Gleichgewichtslage des Zapfenmittelpunktes im Lager eine Rolle.

c) Dämpfungseigenschaften des im Gleitlager rotierenden Zapfens (ebenes Problem). Wir untersuchen zunächst den Fall, daß der Zapfen entsprechend Abb. 5 in der Lagerschale gelagert ist. Wenn wir mit δ das radiale Lagerspiel, mit ε die Exzentrizität der Zapfenachse und mit e wiederum die Amplitude der Zapfenschwingung bezeichnen, ergibt sich die Spalthöhe als Funktion des Zentriwinkels φ und der Zeit t zu

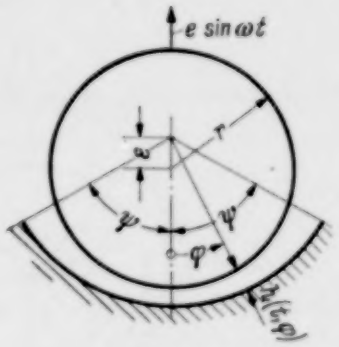

Abb. 5.

$$h = h(\varphi, t) = \delta - (\varepsilon - e\sin\omega\, t)\cos\varphi$$

und die Geschwindigkeit der Spalthöhenänderung zu

$$\dot{h} = e\,\omega\cos\omega\, t\cos\varphi\,.$$

Analog (5) gilt hier

$$\frac{dp}{d\varphi} = -\,r\frac{12\,\mu}{h^3}\,q_\varphi\,.$$

Mit $q_\varphi = -\,r\,e\,\omega\cos\omega\, t\sin\varphi$ (Kontinuitätsgleichung) folgt

$$\frac{dp}{d\varphi} = 12\,\mu\, r\frac{\sin\varphi}{[\delta - (\varepsilon - e\sin\omega\, t)\cos\varphi]^3}\,e\,\omega\cos\omega\, t\,.$$

Indem der Druck außerhalb des Spaltes der Einfachheit halber gleich Null gesetzt wird, ergibt sich folgender Druck im Spalt:

$$p(\varphi) = \frac{6\,\mu\, r^2}{\varepsilon - e\sin\omega\, t}\left\{\frac{1}{[\delta - (\varepsilon - e\sin\omega\, t)\cos\psi]^2} - \frac{1}{[\delta - (\varepsilon - e\sin\omega\, t)\cos\varphi]^2}\right\}.$$

Die Resultierende dieses Druckes wird daraus wie folgt gefunden:

$$D = 2\int_0^{\psi} p(\varphi)\cos\varphi\; r\, d\varphi.$$

Unter der Voraussetzung kleiner Schwingungen ($e \ll \delta - \varepsilon$) läßt sich dann auf dem gleichen Wege wie in b) folgende Dämpfungskonstante ermitteln:

$$b = 12\,\mu\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\left\{\frac{2}{(1-\chi^2)^{3/2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+\chi}{1-\chi}}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right) - \frac{(\cos\psi-\chi)\sin\psi}{(1-\chi\cos\psi)^2(1-\chi^2)}\right\} \tag{14}$$

mit $\chi = \frac{\varepsilon}{\delta}$.

Beim rotierenden Zapfen ist nun die Verbindungslinie zwischen Lager- und Zapfenmittelpunkt nicht mehr Symmetrielinie der Lagerschale; somit ist die engste Spaltstelle keine „Wasserscheide". Die Folge ist, daß der Versuch, für eine Lagerschale, z. B. für das 120°-Lager, bei unsymmetrischer Zapfenlage die Dämpfungskonstante zu berechnen, einen erheblichen Rechenaufwand mit sich bringen würde. Auf Grund der folgenden einfachen Überlegung dürfte jedoch dieser Aufwand, zumindest für die praktische Anwendung der vorliegenden Theorie, unnötig sein.

Bekanntlich ist an der Tragwirkung des Lagers nur ein kleiner Bereich um die engste Spaltstelle maßgeblich beteiligt; jedem Praktiker ist jedoch der große Einfluß geläufig, den auch das Spiel der oberen Lagerschale auf die Laufruhe einer rotierenden Maschinenwelle hat. Es erscheint daher sinnvoll für die Berechnung der Dämpfungseigenschaften des Lagers, dieses als vollumschlossenes Halslager (Abb. 6) zu betrachten, weil dadurch angenähert auch die Wirkung der oberen Lagerschale mitberücksichtigt wird, die besonders für große Werte der Lagerkennzahl G — also gerade für die Fälle gefährdeter Stabilität — an der Dämpfung erheblichen Anteil hat. Unter dieser Voraussetzung erhält man dann aus (14) für $\psi = \pi$ die Dämpfungskonstante für Zapfenschwingung in der z'-Richtung wie folgt:

$$b_{z'z'} = 12\,\mu\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\frac{\pi}{(1-\chi^2)^{3/2}}\,. \tag{15}$$

Für die Dämpfungskonstante in der x'-Richtung wird angenommen, daß diese praktisch unabhängig von der Exzentrizität ε des Lagerzapfens ist und daher durch Nullsetzen von χ aus (15) gewonnen werden kann:

$$b_{x'x'} = 12\,\mu\left(\frac{r}{\delta}\right)^3\pi\,. \tag{15a}$$

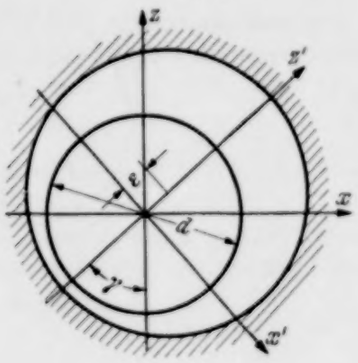

Abb. 6.

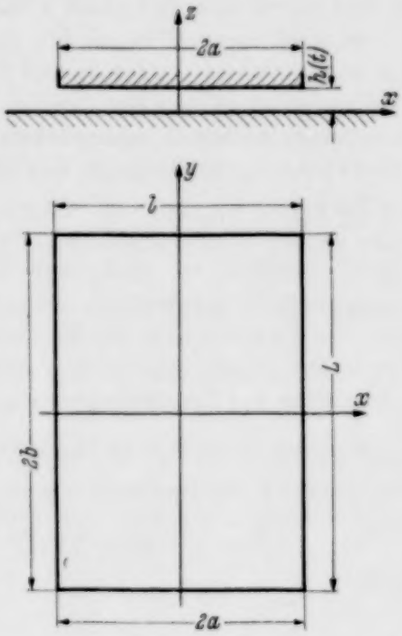

Abb. 7.

d) Dämpfung der ebenen Platte und des Zapfens endlicher Länge. Bei den bisher behandelten Aufgaben war stets vorausgesetzt, daß in y-Richtung (Abb. 7) keine Strömung stattfindet. Beim wirklichen Lager tritt aber ein Ausfluß des Schmiermittels nach beiden Lagerenden auf, der die dämpfende Wirkung herabsetzt. Da das Problem für den Zapfen endlicher Länge bisher nicht gelöst wurde, soll hier nur eine Abschätzung gewonnen werden, indem der Einfluß des Endausflusses beim Zapfen der entsprechenden Lösung dieser Aufgabe bei der ebenen Platte entnommen wird.

Das Problem findet seine mathematische Formulierung unter den zulässigen Voraussetzungen der schleichenden Strömung in folgenden drei Gleichungen:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\,\mu}{h^3}\,q_x\,, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{12\,\mu}{h^3}\,q_y\,, \qquad \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -\dot{h}\,.$$

Wegen $\partial q_x/\partial y = \partial q_y/\partial x$ lassen sich diese Gleichungen zu folgender inhomogenen Potentialgleichung vereinen:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{12\,\mu\,\dot{h}}{h^3}\,. \tag{16}$$

Das Einsetzen des Lösungsansatzes

$$p = C_1 \sum_{i=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^i}{(2\,i+1)^3} \cos{(2\,i+1)\frac{\pi\,x}{2\,a}} \frac{\mathfrak{Cof}\,(2\,i+1)\frac{\pi\,y}{2\,a}}{\mathfrak{Cof}\,(2\,i+1)\frac{\pi\,b}{2\,a}} + C_2\,(a^2 - x^2) + C_3$$

ergibt

$$C_2 = -\frac{6\,\mu\,\dot{h}}{h^3}\,.$$

Die Erfüllung der Randbedingung $p = p_0$ für $x = \pm\,a$ erfordert $C_3 = p_0$. Im Hinblick auf die Summenformel

$$\sum_{i=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^i}{(2\,i+1)^3} \cos{(2\,i+1)\frac{\pi\,x}{2\,a}} = \frac{\pi}{8}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi\,x}{2\,a}\right)^2\right]$$

folgt wegen der Randbedingung $p = p_0$ für $y = \pm\,b$

$$C_1 = \frac{192\,\mu\,a^2}{\pi^3\,h^3}\,\dot{h}\,.$$

Damit erhalten wir folgende Formel für den Überdruck im Spalt:

$$p - p_0 = \left[\frac{192\,\mu\,a^2}{\pi^3\,h^3} \sum_{i=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^i}{(2\,i+1)^3} \cos{(2\,i+1)\frac{\pi\,x}{2\,a}} \frac{\mathfrak{Cof}\,(2\,i+1)\frac{\pi\,y}{2\,a}}{\mathfrak{Cof}\,(2\,i+1)\frac{\pi\,b}{2\,a}} + 6\,\frac{\mu}{h^3}\,(x^2 - a^2)\right]\dot{h}\,. \tag{17}$$

Gleichung (17) geht für $b \to \infty$ in die entsprechende Formel für den unendlich langen Plattenstreifen (4a) über.

Durch Integration von (17) über die Plattenfläche

$$D = 4\int_0^b \int_0^a (p - p_0)\,dx\,dy$$

ergibt sich mit $l = 2a$ und $L = 2b$ folgender Ausdruck für den geschwindigkeitsproportionalen Widerstand der Platte gegen Auslenkung in z-Richtung [1]:

$$D = \frac{\mu\,L\,l^3}{h^3}\left[\frac{192}{\pi^5}\,\frac{l}{L} \sum_{i=0}^{\infty}{}' \frac{\mathfrak{Tg}\left[(2\,i+1)\frac{\pi\,L}{2\,l}\right]}{(2\,i+1)^5} - 1\right]\dot{h}\,. \tag{18}$$

Für den Widerstand je Längeneinheit des unendlich langen Plattenstreifens würde sich ergeben haben

$$D_\infty = -\frac{\mu\,l^3}{h^3}\,\dot{h}\,. \tag{19}$$

Vergleichen wir hiermit die entsprechende Formel für den unendlich langen Zapfen

$$D_{z'\infty} = -\frac{12\,\mu\,r^3\,\pi}{\delta^3\,(1-\chi^2)^{3/2}}\,\dot{h} \quad \text{bzw.} \quad D_{z'\infty} = -\frac{12\,\mu\,r^3\,\pi}{\delta^3}\,\dot{h}\,,$$

so lassen sich diese in (19) überführen, wenn wir

$$\sqrt[3]{12\,\pi}\,r = l \quad \text{und} \quad h = \delta\sqrt{1-\chi^2} \qquad \text{bzw.} \qquad \sqrt[3]{12\,\pi}\,r = l \quad \text{und} \quad h = \delta$$

setzen. Indem wir von diesen Beziehungen zwischen unendlich langem Zapfen und unendlich langer Platte für die näherungsweise Ermittlung der Dämpfungskonstanten des endlich

[1] Wenn in (18) an Stelle von $-3\,\mu\,\dot{h}/h^3$ das Produkt $G\,\vartheta$ (elastischer Schubmodul G · Drillwinkel ϑ) gesetzt wird, entspricht die rechte Seite von (18) dem in einem Drillstab mit Rechteckquerschnitt $l \cdot L$ durch Schubspannungen übertragenen Drillmoment. Es wird also dem bekannten Strömungsgleichnis für die Stabtorsion ein weiteres hinzugefügt.

langen Zapfen Gebrauch machen, erhalten wir mit Hilfe von (18) folgende Ausdrücke für diese Konstanten in den z'- und x'-Richtungen:

$$\left.\begin{aligned} b_{z'z'} &= \frac{12\,\mu\,\pi\,L\,r^3}{\delta^3\,(1-\chi^2)^{3/2}}\,1 - \frac{192}{\pi^5}\sqrt[3]{12\,\pi}\,\frac{r}{L}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{g}\left[(2\,i+1)\dfrac{\pi\,L}{2\sqrt[3]{12\,\pi\,r}}\right]}{(2\,i+1)^5}\,, \\ b_{x'z'} &= (1-\chi^2)^{3/2}\,b_{z'z'}\,. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Aus diesen ergeben sich die entsprechenden Dämpfungskonstanten für die x- und z-Richtungen wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} b_{xx} &= b_{z'z'}\sin^2\gamma + b_{x'x'}\cos^2\gamma\,, \\ b_{zz} &= b_{z'z'}\cos^2\gamma + b_{x'x'}\sin^2\gamma\,, \\ b_{xz} &= b_{zx} = \cos\gamma\sin\gamma\,b_{z'z'}\,[1-(1-\chi^2)^{3/2}]\,. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Die Auswertung der Ausdrücke (21) ergibt, daß die Dämpfungsgrößen b_{xx} und b_{zz} praktisch identische Funktionen der Lagerkennzahl G sind, und daß ihnen gegenüber b_{xz} vernachlässigbar klein ist. Die Dämpfungseigenschaften werden daher mit ausreichender Genauigkeit durch nur eine Dämpfungsgröße gekennzeichnet, die wir nun ohne Indices mit b bezeichnen wollen. Ihr Verlauf ist in dimensionsloser Darstellung für einige Verhältnisse d/L der Abb. 8 zu entnehmen.

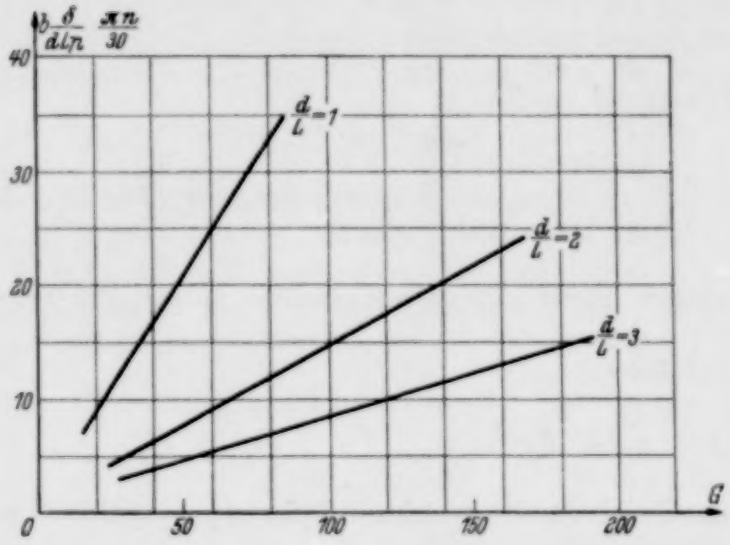

Abb. 8.

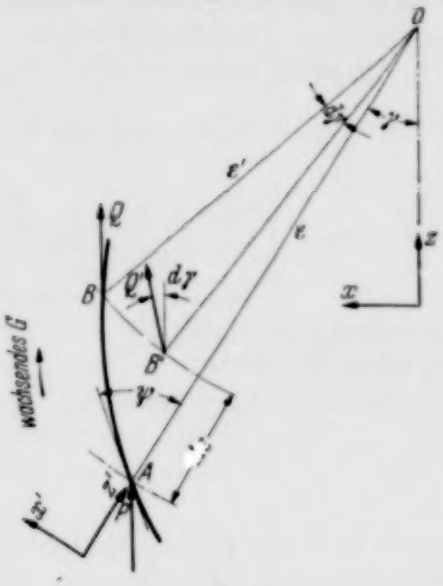

Abb. 9.

3. Ermittlung der Federzahlen für das 120°-Lager. Dieses besonders in der amerikanischen Praxis häufig verwendete Lager hat *S. J. Needs* [1] in einer ausführlichen experimentellen Arbeit untersucht. Seine Untersuchungsergebnisse hat *A. C. Hagg* für die Ermittlung der Federzahlen mit Hilfe des Verfahrens von *Stodola* ausgewertet. Der Grundgedanke dieses Verfahrens sei im folgenden kurz erläutert. Die Punkte A und B der Abb. 9 stellen zwei benachbarte Gleichgewichtslagen der Zapfenmitte dar. Die entsprechenden vertikalen Lagertragkräfte sind P und Q. Während des durch die Lagerkennzahl G gekennzeichneten Betriebes befinde sich der Zapfenmittelpunkt in A. Durch irgendeine Störung werde er aus seiner Gleichgewichtslage A nach B' ausgelenkt. Die dann von dem Schmiermittelfilm auf den Zapfen ausgeübte Kraft Q' soll nun dem Betrage nach gleich der Kraft Q sein, weil B und B' die gleiche Exzentrizität ε' besitzen. Für die Bestimmung der Richtung der Lagerkraft in B' wird angenommen, daß der Winkel zwischen Q und dem Fahrstrahl BO gleich dem zwischen Q' und $B'O$ ist.

Unter der Voraussetzung kleiner Auslenkungen ergeben sich damit folgende Federkonstanten für die x'- und z'-Richtungen:

$$\left.\begin{aligned} c_{x'x'} &= \frac{P}{\varepsilon}\cos\gamma\,, & c_{x'z'} &= \frac{P}{\varepsilon}\cos\gamma\,\mathrm{tg}\,\psi - \frac{\partial P}{\partial\varepsilon}\sin\gamma\,, \\ c_{z'x'} &= \frac{P}{\varepsilon}\sin\gamma\,, & c_{z'z'} &= \frac{\partial P}{\partial\varepsilon}\cos\gamma + \frac{P}{\varepsilon}\sin\gamma\,\mathrm{tg}\,\psi\,. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

[1] S. J. *Needs*, Trans. A.S.M.E., 56 (1934), APM — 56 — 16, S. 721.

Die entsprechenden Federkonstanten für die x- und z-Richtungen sind

$$\left.\begin{aligned} c_{xx} &= \frac{P}{\varepsilon}(\sin\gamma\,\mathrm{tg}\,\psi + \cos\gamma)\,, & c_{xz} &= -\frac{P}{\varepsilon}(\sin\gamma - \cos\gamma\,\mathrm{tg}\,\psi)\,, \\ c_{zx} &= \frac{\partial P}{\partial\varepsilon}\sin\gamma\,, & c_{zz} &= \frac{\partial P}{\partial\varepsilon}\cos\gamma\,. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Zur numerischen Auswertung dieser Formeln möge die von *Hagg* auf Grund der Ergebnisse von *Needs* gefundene Beziehung zwischen der Lagerkennzahl G und der bezogenen Exzentrizität χ benutzt werden:

$$G \cdot \alpha \cdot e^{\beta\chi} = 1\,.$$

Damit lassen sich P und $\partial P/\partial\varepsilon$ in (22) und (23) schreiben:

$$P = 2\,L \cdot r\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 \mu\, n\, \alpha\, e^{\beta\chi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial P}{\partial\varepsilon} = \frac{\beta}{\delta}\,P\,.$$

Darin sind α und β dimensionslose Konstante, die lediglich von dem Verhältnis $2\,r/L = d/L$ abhängen. Zur Erleichterung der praktischen Anwendung sind die Federzahlen (23) als Funktion der Lagerkennzahl G in Abb. 10 bis 13 dimensionslos dargestellt.

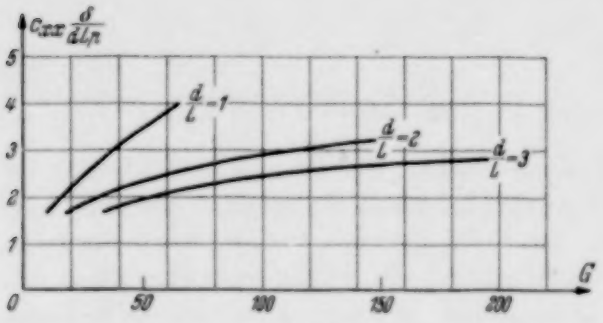

Abb. 10.

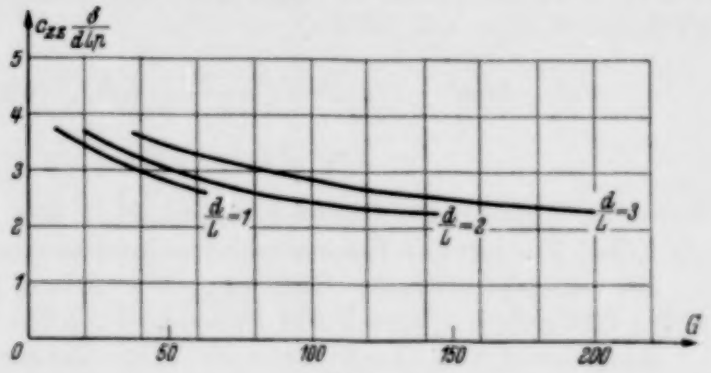

Abb. 11.

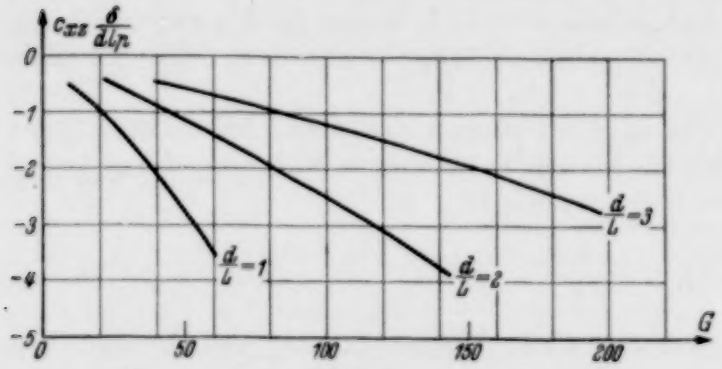

Abb. 12.

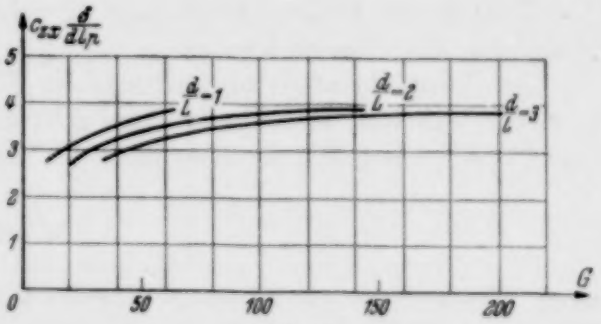

Abb. 13.

4. Zusammenfassung. Die vorliegende Theorie ermöglicht die rechnerische Ermittlung der hydrodynamischen Dämpfungs- und Federeigenschaften von Gleitlagern. Die Ergebnisse dieser Theorie sind in den Abb. 8 und 10 bis 13 dimensionslos dargestellt. Diese Diagramme ermöglichen die numerische Bestimmung des Schwingungsverhaltens von rotierenden Wellen unter Berücksichtigung der Gleitlagereigenschaften, die besonders im Hinblick auf die Laufstabilität von wesentlicher Bedeutung sind [1]. Auch die kritischen Drehzahlen und das Verhalten der Wellen in der Umgebung einer solchen Drehzahl erfahren durch die Gleitlagereigenschaften eine nennenswerte Beeinflussung. So zeigte z. B. die für einen Turbinengeneratorläufer durchgeführte Schwingungsrechnung neben der zu erwartenden Herabsetzung und Aufspaltung der Wellenkritischen eine beträchtliche Dämpfungswirkung der Gleitlager, welche die Amplitude der zirkular-polarisierten Schwingung in der ersten kritischen Drehzahl auf das etwa sechsfache der Läufer-Exzentrizität beschränkte.

(Eingegangen am 21. Juli 1953).

Anschrift des Verfassers: apl. Prof. Dr.-Ing. *E. Pestel*, Hildesheim, Weinberg 60.

[1] *E. Pestel*, Drehzahlfremde selbsterregte Schwingungen von Maschinenwellen, Verlag der Allianz-Maschinenversicherung, Wiesbaden 1953.

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung für das kreiszylindrische Rohr.

Von **E. R. Berger.**

Das System der Differentialgleichungen für die Verschiebungskomponenten eines biegesteifen Rohres wurde erstmalig von *Miesel* [1] aufgestellt. Später hat *Flügge* [2], von anderen Verschiebungsgrößen ausgehend, das entsprechende Gleichungssystem unter Berücksichtigung der Querdehnung aufgestellt. Es ist linear, mit konstanten Koeffizienten und, falls nur Randkräfte angreifen, homogen. Man löst es durch den Ansatz

$$\exp(-\lambda x/a)\cdot\exp(im\varphi),$$

wobei a der Rohrhalbmesser ist, x die Koordinate in Richtung der Erzeugenden, φ das Azimut. Durch Einsetzen in die *Flügge*schen Gleichungen ergibt sich die charakteristische Gleichung [*Flügge*, S. 125, Gl. (78)]:

$$\begin{aligned}\lambda^8 - 4(m^2 - \nu/2)\lambda^6 + \left(\frac{1-\nu^2}{k} + 6m^4 - 6m^2\right)\lambda^4 \\ - 2m^2[2m^4 - (4-\nu)m^2 + (2-\nu)]\lambda^2 + m^4(m^2-1)^2 = 0\,.\end{aligned} \tag{1}$$

Darin bedeutet ν die Querdehnungszahl, k den Schalenparameter, der immer viel kleiner ist als Eins. Für ein geschlossenes Rohr muß m ganzzahlig sein, λ ist aus (1) zu bestimmen.

Die charakteristische Gleichung von *Miesel* [S. 35, Gl. (27)] stimmt damit genau überein, außer daß neben $1/k$ noch der Summand 3 steht, ein Unterschied, der völlig bedeutungslos ist.

Ausgehend von einem vereinfachten Ansatz hat *Aas-Jakobsen* [3] eine ähnliche Gleichung erhalten [S. 402, Gl. (144)], die sich von (1) nur unwesentlich unterscheidet: anstelle der in (1) unterstrichenen Koeffizienten 6, 4, 2 erhält *Aas-Jakobsen* 4, 3, 1, ferner ist $1/k$ ersetzt durch $1 + 1/k$; beide Unterschiede sind für das Folgende ohne Belang. Außerdem fehlt bei *Aas-Jakobsen* die Querdehnung.

Gleichung (1) ist als biquadratische Gleichung in λ^2 mühsam aufzulösen. *Miesel* verwendet dazu die kubische Resolvente, und gibt daneben für kleine Werte von m Näherungsformeln für λ an [S. 37, Gl. (35)], die aber bis zu 5% Fehler ergeben, sobald

$$m^2(m^2-1) = \frac{1-\nu^2}{6k}$$

wird, also nur für ganz kleine Werte von m brauchbar sind. *Flügge* [S. 126] gibt ebenfalls ein Näherungsverfahren für kleine m: er streicht einmal die hohen, einmal die niedrigen Potenzen von λ und erhält so zwei quadratische Gleichungen für λ^2. Das Verfahren versagt, sobald λ in die Größenordnung von m kommt (ein Kriterium hierfür ist nicht angegeben), auch erfordert es noch das unbequeme Ausziehen der Quadratwurzel aus dem komplexen Wert λ^2. *Aas-Jakobsen* [S. 402—3] löst die Gleichung für beliebige Werte m durch ein Iterationsverfahren, das aber immerhin noch einige Rechenschritte erfordert.

Die folgende Methode gibt eine einfache Näherungsformel für λ^2, wobei nur vorausgesetzt wird, daß $\sqrt{k} \ll 1$ ist, während m beliebige Werte annehmen kann; der Fehler ist von der Größenordnung $\sqrt{k}$. Ist außerdem noch

$$m < \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{1-\nu^2}{k}},$$

so kann man Realteil und Imaginärteil von λ nach Potenzen von m entwickeln und erhält mit fünf Gliedern eine Genauigkeit mit einem Fehler von unter 1%.

---

[1] *K. Miesel*, Ing.-Arch. 1 (1929—30), S. 22.
[2] *Flügge*, Statik und Dynamik der Schalen. Berlin 1934.
[3] *Aas-Jakobsen*, Bauing. 20 (1930), S. 394.

Man setze

$$\left.\begin{aligned} \frac{k}{1-\nu^2} &= \bar{k}; \qquad \sqrt{\bar{k}} = \gamma, \\ \gamma\, m^2 &= n; \qquad \gamma\, \lambda^2 = x, \end{aligned}\right| \tag{2}$$

dann wird (1) zu

$$x^4 - 4\,x^3(n - \nu\,\gamma/2) + x^2(1 + 6\,n^2 - 6\,n\,\gamma) - 4\,x\,n(n-\gamma)(n - \gamma + \nu\,\gamma/2) + n^2(n-\gamma)^2 = 0. \tag{3}$$

Setzt man weiter

$$x = y\,\sqrt{n(n-\gamma)}, \tag{4}$$

so ergibt sich aus (3) nach einigen Umformungen

$$\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 4\,\frac{n - \gamma/2}{\sqrt{n(n-\gamma)}}\left(y + \frac{1}{y}\right) - 2\,\gamma\,\frac{1-\nu}{\sqrt{n(n-\gamma)}}\left(y - \frac{1}{y}\right) + \left[\frac{1}{n(n-\gamma)} + 6\right] = 0. \tag{5}$$

Dies ist eine reziproke Gleichung für y, wenn man von dem Glied $y - 1/y$ absieht; es läßt sich aber zeigen, daß dieses Glied im Vergleich zu den übrigen Gliedern nur von der Größenordnung γ ist und daher vernachlässigt werden kann.

Schließlich setzen wir noch

$$y + \frac{1}{y} = \frac{z}{\sqrt{n(n-\gamma)}} \tag{6}$$

und erhalten damit aus (5)

$$[z - (2\,n - \gamma)]^2 + (1 - \gamma^2) = 0. \tag{7}$$

Hier kann $\gamma^2 = \bar{k}$ neben 1 vernachlässigt werden; bezeichnet man noch

$$n - \gamma/2 = \bar{n}, \quad \text{also} \quad \bar{n} = (m^2 - 1/2)\,\gamma, \tag{8}$$

so wird

$$z = i + 2\,\bar{n}.$$

Nach (6) ist

$$y^2 - \frac{z\,y}{\sqrt{n(n-\gamma)}} + 1 = 0,$$

oder (4) eingesetzt,

$$x^2 - z\,x + n(n-\gamma) = 0. \tag{9}$$

Daraus ergibt sich

$$x = \frac{1}{2}\left(i + 2\,\bar{n} \pm i\,\sqrt{1 - 4\,i\,\bar{n} - \gamma^2}\right).$$

Wieder wird γ^2 neben 1 vernachlässigt und wir erhalten

$$x = \frac{i}{2}\left(1 - 2\,i\,\bar{n} \pm \sqrt{1 - 4\,i\,\bar{n}}\right). \tag{10}$$

Dann ist aber, wie man leicht bestätigt,

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{i}}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\,i\,\bar{n}}\right). \tag{11}$$

Damit ergibt (2) für die größere Wurzel

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt[4]{\bar{k}}} \\ &= \frac{\sqrt{i}}{2\sqrt[4]{\bar{k}}}\left(1 + \sqrt{1 - 4\,i\,\bar{n}}\right) && \text{(12a)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt[4]{\bar{k}}}\left(\sqrt{i} + \sqrt{4\,\bar{n} + i}\right). && \text{(12b)} \end{aligned}$$

Falls $\bar{n}$ klein ist, wird bei der Berechnung der kleineren Wurzel λ_2 die Differenz in der Klammer von (11) sehr ungenau. Besser schließt man aus (9)

$$x_2 = \frac{n(n-\gamma)}{x_1}$$

und daher für den Wert im ersten Quadranten

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{m\sqrt{m^2-1}}{\bar{\lambda}_1}. \tag{13}$$

Solange $\bar{n} < 1/4$ ist, kann man die Quadratwurzel in (12a) nach Potenzen von $\bar{n}$ entwickeln und erhält damit

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{k}}\left\{[(1 + n^2 - 5\,\bar{n}^4) + (\bar{n} - 2\,\bar{n}^3)] + i\,[(1 + \bar{n}^2 - 5\,\bar{n}^4) - (\bar{n} - 2\,\bar{n}^3)]\right\}, \tag{14a}$$

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{2}}\, m\sqrt{m^2-1}\,\left\{[(1-2\,\bar{n}^2+14\,\bar{n}^4)+(\bar{n}-5\,\bar{n}^3)]+i\,[(1-2\,\bar{n}^2+14\,\bar{n}^4)-(\bar{n}-5\,\bar{n}^3)]\right\}. \tag{14b}$$

Da die Teilreihen alternieren, ist der Fehler kleiner als das erste vernachlässigte Glied, also

$$\text{für } \lambda_1: \begin{cases} \text{Realteil:} & \text{negativ,} & < 14\,\bar{n}^5\,(1+3\,\bar{n}) < 25^0/_{00}, \\ \text{Imaginärteil:} & \text{negativ,} & < 14\,\bar{n}^5\,(1-3\,\bar{n}) < 3{,}5^0/_{00}, \end{cases}$$

$$\text{für } \lambda_2: \begin{cases} \text{Realteil:} & \text{positiv,} & < 42\,\bar{n}^5\,(1-3\,\bar{n}) < 11^0/_{00}, \\ \text{Imaginärteil:} & \text{positiv,} & < 42\,\bar{n}^5\,(1+3\,\bar{n}) < 75^0/_{00}. \end{cases}$$

Die oberen Schranken gelten für $\bar{n} = 1/4$, sie werden auch dort nicht erreicht. Zu diesen Fehlern kommt noch ein Fehler von der Größenordnung $\sqrt{k}$ dazu, der von der Vernachlässigung in (5) herrührt.

Man kann ihn z. T. korrigieren, indem man den Wert λ nach (12) oder (14a) mit

$$1 - i\,(1-\nu)\,\gamma/2 \tag{15}$$

multipliziert, bzw. $\bar{\lambda}$ nach (13) oder (14b) mit dem konjugierten Wert.

Zahlenbeispiele: *Flügge* [S. 126] berechnet die Wurzeln für

$$k = 3{,}705 \cdot 10^{-6} \quad \text{und} \quad m = 8;$$

ν ist nicht angegeben, wir setzen es gleich Null. Damit wird

$$\gamma = \sqrt{k} = 1{,}925 \cdot 10^{-3}, \quad \bar{n} = 63{,}5 \cdot \gamma = 0{,}1222,$$
$$1/\sqrt{2\,\gamma} = 16{,}116, \qquad \sqrt{\gamma/2} \cdot 8 \cdot \sqrt{63} = 1{,}9698.$$

Die Reihenentwicklungen (14) ergeben

$1{,}-$		$1{,}-$	
$\bar{n}^2 = 0{,}0149$	$\bar{n} = 0{,}1222$	$-2\,\bar{n}^2 = -0{,}0299$	$\bar{n} = 0{,}1222$
$-5\,\bar{n}^4 = -0{,}0011$	$-2\,\bar{n}^3 = -0{,}0036$	$14\,\bar{n}^4 = 0{,}0031$	$-5\,\bar{n}^3 = -0{,}0091$
$1{,}0138$	$0{,}1186$	$0{,}9732$	$0{,}1131$

$$1{,}0138 \pm 0{,}1186 = \begin{cases} 1{,}1324 \\ 0{,}8952 \end{cases} \qquad 0{,}9732 \pm 0{,}1131 = \begin{cases} 1{,}0863 \\ 0{,}8601 \end{cases}$$

also

$$\lambda_1 = 18{,}25 + 14{,}43\,i, \qquad \bar{\lambda}_2 = 2{,}140 + 1{,}694\,i.$$

(*Flügge* gibt an $18{,}22 + 14{,}42\,i$ bzw. $2{,}14 + 1{,}69\,i$.)

Nimmt man dasselbe k, aber $m = 40$, so wird $\bar{n} = 3{,}079$; hier sind die Reihen nicht mehr verwendbar, wir müssen nach Formel (12b) arbeiten. Man erhält

$$\lambda_1 = 48{,}09 + 9{,}69\,i, \quad \bar{\lambda}_2 = 31{,}98 + 6{,}43\,i$$

(*Flügge* gibt an $48{,}17 + 9{,}74\,i$ bzw. $31{,}89 + 6{,}51\,i$.)

Aas-Jakobsen [S. 403, Zahlentafel VI] behandelt dasselbe Beispiel, jedoch ist dort durch einen Druckfehler $k = 3{,}705 \cdot 10^{-5}$ angegeben; bei seinem ersten Beispiel ($k = 2 \cdot 10^{-6}$, $m = 2$)

ist λ_2 falsch berechnet: in der Formel wurde irrtümlich B anstatt $\sqrt{B}$ eingesetzt. Bei richtiger Rechnung ergibt sich $\lambda_2 = 0{,}0926 + 0{,}0917\,i$.

Miesel [S. 37, Tab. 1] gibt u. a. für $\bar{k} = 0{,}001$ und $m = 2$ als strengen Wert an

$$\lambda_1 = 4{,}50 + 3{,}51\,i, \quad \lambda_2 = 0{,}419 + 0{,}354\,i$$

und nach seiner Näherung

$$\lambda_1 = 4{,}50 + 3{,}51\,i, \quad \lambda_2 = 0{,}465 + 0{,}386\,i.$$

Unsere Formel (14) ergibt

$$\lambda_1 = 4{,}45 + 3{,}59\,i, \quad \lambda_2 = 0{,}471 + 0{,}381\,i,$$

und korrigiert nach (15):

$$\lambda_1 = 4{,}51 + 3{,}52\,i \quad \bar{\lambda}_2 = 0{,}465 + 0{,}388\,i.$$

Rechnet man mit den Werten von *Miesel* die Kontrolle

$$|\lambda_1^2| \cdot |\lambda_2^2| = m^2(m^2 - 1) = 12\,,$$

so ergeben die genauen Werte 9,80, die Näherung 11,90; die Näherung dürfte also genauer sein, als die durch einen umständlichen Rechnungsgang erhaltenen „genauen" Werte.

(Eingegangen am 23. Juli 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *E. R. Berger*, Wien IV, Technische Hochschule.

Ein Beitrag zum Randstörungsproblem isotroper Kreiszylinderschalen.

Von **D. Rüdiger.**

1. Einleitung. Im XX. Band dieser Zeitschrift hat Herr *W. Zerna*[1] für die Berechnung der Randstörungen kreiszylindrischer Tonnenschalen eine komplexe Differentialgleichung vierter Ordnung für eine Spannungsfunktion angegeben und mit deren Lösung den Spannungs- und Verschiebungszustand für Kreiszylinderschalen zwischen zwei Endbinderscheiben beschrieben. Mit dem vorliegenden Beitrag werden ausgehend von den Beziehungen (13) und (14) der zitierten Arbeit die zur Lösung der Randaufgabe notwendigen Schnittkraft- und Verschiebungsgleichungen in einer für die Berechnung zweckmäßigen Form so zusammengestellt, daß eine numerische Auswertung von Rekursionsformeln fortfällt.

2. Geometrische Grundlagen, Definitionen. Diese sind in Abb. 1 und 2 zusammengestellt. Die Bezeichnung der Schnittgrößen ist so gewählt, daß der erste Index den Ort, der zweite Index die Richtung des betreffenden Vektors angibt.

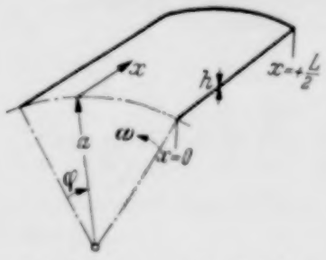

Abb. 1. Geometrie der Schalenmittelfläche und Koordinatensystem.

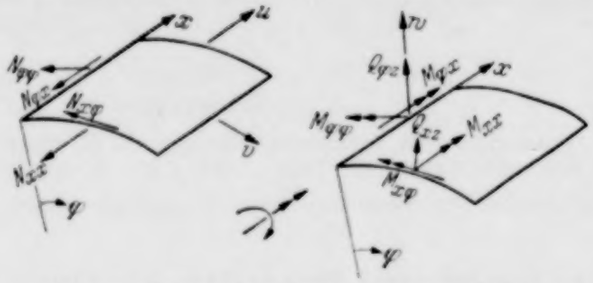

Abb. 2. Definition der Schnittkräfte und Verschiebungen.

3. Differentialgleichung. Aus den simultanen Differentialgleichungen (13) und (14) der *Zerna*schen Arbeit ergibt sich die Differentialgleichung des Problems als Determinante der Operatoren $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ und $\xi = \frac{x}{a}$ zu[2]

$$\Delta\Delta\Delta\Delta\Phi + \frac{1-\nu^2}{k}\Phi'''' = 0\,. \tag{1}$$

Hierin ist ν die Querdehnungszahl, k die übliche Abkürzung für $h^2/12a^2$, und Striche bedeuten Ableitungen nach ξ.

4. Lösung der Differentialgleichung. Als Lösungsansatz wird wegen den in $x = \pm L/2$ geforderten Randbedingungen der Ansatz $\Phi = c \cdot e^{\sqrt{m+1}\,\lambda\varphi} \cos \lambda\,\xi$ mit $\lambda = n\,\pi\,a/L$ verwendet. Die Einführung des Lösungsansatzes in die Differentialgleichung (1) liefert die biquadratische Gleichung

$$m^4 + \frac{1-\nu^2}{\lambda^4 k} = 0\,.$$

Werden die Abkürzungen

$$\varkappa_1 = \sqrt{\sqrt{(1+\varepsilon)^2+1} + (1+\varepsilon)}\,, \qquad \mu_1 = \sqrt{\sqrt{(1+\varepsilon)^2+1} - (1+\varepsilon)}\,,$$

$$\varkappa_2 = \sqrt{\sqrt{(1-\varepsilon)^2+1} - (1-\varepsilon)}\,, \qquad \mu_2 = \sqrt{\sqrt{(1-\varepsilon)^2+1} + (1-\varepsilon)}\,,$$

$$\varepsilon = \lambda \sqrt[4]{\frac{4k}{1-\nu^2}}\,, \qquad \bar{\varphi} = \varphi\,\frac{\lambda}{\sqrt{2\,\varepsilon}}\,; \qquad \bar{\omega} = \omega\,\frac{\lambda}{\sqrt{2\,\varepsilon}}\,.$$

[1] *W. Zerna*, Ing.-Archiv. 20 (1952) S. 357.

[2] Die Existenz der Differentialgleichung (1) für Kreiszylinderschalen hat bereits im Jahre 1952 *H. Neuber* mit Hilfe der allgemeinen Schalentheorie unter Vernachlässigung von Gliedern, die gegenüber ähnlich gebauten mit dem Faktor k behaftet sind, in einer nicht veröffentlichten Arbeit nachgewiesen. Ihr theoretischer Teil ist im wesentlichen in der wissenschaftlichen Zeitschrift der T. H. Dresden bekanntgegeben worden. *H. Neuber*, Z. angew. Math. Mech. 29 (1949) S. 97; Wiss. Z. T. H. Dresden 2 (1953) S. 511.

definiert, so kann man die Spannungsfunktion Φ in der folgenden Weise anschreiben:

$$\begin{aligned}\Phi = \cos\lambda\,\xi\,[&e^{-\varkappa_1\overline{\varphi}}\,(c_1\sin\mu_1\overline{\varphi} + c_2\cos\mu_1\overline{\varphi}) + e^{-\varkappa_2\overline{\varphi}}\,(c_3\sin\mu_2\overline{\varphi} + c_4\cos\mu_2\overline{\varphi})\\ &+ e^{-\varkappa_1\overline{\omega}}\,(c_5\sin\mu_1\overline{\omega} + c_6\cos\mu_1\overline{\omega}) + e^{-\varkappa_2\overline{\omega}}\,(c_7\sin\mu_2\overline{\omega} + c_8\cos\mu_2\overline{\omega})]\,.\end{aligned} \tag{3}$$

Die Schnittkräfte und Verschiebungen werden aus der Lösung (3) durch Differentiation gewonnen. Dabei lassen sich nach einem Vorschlag von *U. Finsterwalder*[1] die Ausdrücke für die Spannungs- und Verschiebungsgrößen sämtlich auf die Form bringen:

$$\begin{aligned}W = \psi\begin{Bmatrix}\cos\lambda\,\xi\\ \sin\lambda\,\xi\end{Bmatrix}\{&+ e^{-\varkappa_1\overline{\varphi}}\,[(A_1\alpha_1 - B_1\beta_1)\sin\mu_1\overline{\varphi} + (A_1\beta_1 + B_1\alpha_1)\cos\mu_1\overline{\varphi}] +\\ &+ e^{-\varkappa_2\overline{\varphi}}\,[(A_2\alpha_2 - B_2\beta_2)\sin\mu_2\overline{\varphi} + (A_2\beta_2 + B_2\alpha_2)\cos\mu_2\overline{\varphi}] +\\ &+ e^{-\varkappa_1\overline{\omega}}\,[(G_1\alpha_1 - H_1\beta_1)\sin\mu_1\overline{\omega} + (G_1\beta_1 + H_1\alpha_1)\cos\mu_1\overline{\omega}] +\\ &+ e^{-\varkappa_2\overline{\omega}}\,[(G_2\alpha_2 - H_2\beta_2)\sin\mu_2\overline{\omega} + (G_2\beta_2 + H_2\alpha_2)\cos\mu_2\overline{\omega}]\}\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Die Faktoren ψ und $\alpha_i\,,\ \beta_i\,(i = 1{,}2)$ sind für $\nu = 0$ in der nachfolgenden Tabelle 1 eingetragen.

Tabelle 1.

W	ψ	α_1	β_1	α_2	β_2
$N_{\varphi\varphi}$	$+\ 1$	$+\ 1$	0	$+\ 1$	0
$\bar{Q}_{\varphi z}$	$+\dfrac{\sqrt{2\,\varepsilon}}{4\,\lambda}$	$+\,[\varkappa_1+\mu_1(1-\varepsilon)]$	$+\,[\varkappa_1(1-\varepsilon)-\mu_1]$	$+\,[\mu_2(1+\varepsilon)-\varkappa_2]$	$+[\varkappa_2(1+\varepsilon)+\mu_2]$
$\dfrac{\partial N_{\varphi x}}{\partial x}$	$+\dfrac{\lambda}{a\sqrt{2\,\varepsilon}}$	$+\ \varkappa_1$	$-\ \mu_1$	$+\ \varkappa_2$	$-\ \mu_2$
$M_{\varphi x}$	$+\dfrac{a\,\varepsilon}{2\,\lambda^2}$	$-\ 1$	$-\ (1+\varepsilon)$	$+\ 1$	$-\ (1-\varepsilon)$
$Q_{\varphi z}$	$+\dfrac{\sqrt{2\,\varepsilon}}{4\,\lambda}$	$+\ [\varkappa_1+\mu_1]$	$+\ [\varkappa_1-\mu_1]$	$+\ [\mu_2-\varkappa_2]$	$+\ [\varkappa_2+\mu_2]$
N_{xx}	$+\dfrac{1}{\varepsilon}$	$-\ (1+\varepsilon)$	$+\ 1$	$+\ (1-\varepsilon)$	$+\ 1$
$E\cdot v$	$+\dfrac{a}{h\lambda\,\varepsilon\sqrt{2\,\varepsilon}}$	$+\,[\varkappa_1(1-\varepsilon)-\mu_1]$	$-[\mu_1(1-\varepsilon)+\varkappa_1]$	$-[\varkappa_2(1+\varepsilon)+\mu_2]$	$+[\mu_2(1+\varepsilon)-\varkappa_2]$
$E\cdot w$	$-\dfrac{2\,a}{h\,\varepsilon^2}$	0	$+\ 1$	0	$-\ 1$
$M_{x\varphi}$	$+\dfrac{a\,\varepsilon^2}{2\,\lambda^2}$				
$E\cdot\vartheta$	$+\dfrac{\sqrt{2}\,\lambda}{h\sqrt{\varepsilon^5}}$	$-\ \mu_1$	$-\ \varkappa_1$	$+\ \mu_2$	$+\ \varkappa_2$
$M_{\varphi\varphi}$	$+\dfrac{a\,\varepsilon\sqrt{2\,\varepsilon}}{4\,\lambda^2}$				
Q_{xz}	$+\dfrac{\varepsilon}{2\,\lambda}$	$+\ 1$	$+\ 1$	$-\ 1$	$+\ 1$
$\bar{Q}_{xz}$		$+\ 2$	$+\ (2+\varepsilon)$	$-\ 2$	$+\ (2-\varepsilon)$

Die Tabelle 1 enthält außer den bereits definierten Schnittkräften und Verschiebungen, die Winkeldrehung ϑ der Kreistangente (positiv mit dem positivem Wirkungssinn des Biegemoments $M_{\varphi x}$), sowie zur Belastung der Randglieder die mit den Drillmomenten verknüpften Querkräfte $\bar{Q}_{\varphi z} = Q_{\varphi z} + \partial M_{\varphi\varphi}/\partial x$ und $\bar{Q}_{xz} = Q_{xz} + \partial M_{xx}/a\,\partial\varphi$. Aufgrund der vereinbarten Näherung der Schnittgrößen sind die Schubkräfte $N_{\varphi x} = N_{x\varphi}$ und die Drillmomente $M_{\varphi\varphi} = M_{xx}$ gleich. Damit sind alle Schnittkraft- und Formänderungsgleichungen gegeben, die zur Lösung der Randaufgabe notwendig sind.

[1] *U. Finsterwalder*, Ing.-Archiv 4 (1933) S. 43.

Die vorliegenden Gleichungen lassen sich auch aus der von *A. Aas Jakobsen*[1] angegebenen ersten Näherung der Differentialgleichung für die Verschiebung w berechnen, wenn man, wie auch *U. Finsterwalder*[2] vorschlägt, von der Eigenschaft gedämpfter Schwingungen Gebrauch macht, daß die niederen Differentialquotienten kleiner als die höheren sind und für eine Näherung vernachlässigt werden können.

5. Zusammenfassung. Ausgehend von den simultanen Differentialgleichungen (13) und (14) der *Zerna*schen Arbeit wird für die Randbelastungen isotroper Kreiszylinderschalen die von *H. Neuber* auf anderem Wege aufgestellte partielle Differentialgleichung achter Ordnung für eine Spannungsfunktion abgeleitet. Die Lösung des Spannungs- und Verschiebungszustandes für Zylinderschalen zwischen zwei Endbinderscheiben kann auf eine einheitliche, von *U. Finsterwalder* vorgeschlagene, Form gebracht werden. Die numerische Behandlung der Randaufgabe für die Vielzahl von Schalentypen wird dadurch erleichtert, daß die Werte $\varkappa_i$, μ_i und α_i, $\beta_i (i = 1{,}2)$ in einfacher Form von nur einer Formgröße abhängen. Für die Beschreibung des Zusammenhanges der Schale mit Randgliedern sei auf die Arbeiten von *U. Finsterwalder* und von *F. Dischinger*[3] hingewiesen.

(Eingegangen am 3. August 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *D. Rüdiger*, Dresden N 6, Königsbrückerstr. 70.

[1] *A. Jakobsen*, Bauingenieur 20 (1939), S. 394.
[2] Siehe Note S. 161.
[3] *F. Dischinger*, Beton u. Eisen 34 (1935), S. 257.

Zur Biegungstheorie einer Vierpilzplatte mit rechteckigen Stützflächen.

Von W. Müller.

1. Einleitung. In einer früheren Mitteilung [1] haben wir die Durchbiegung einer querkraftfrei eingespannten, bzw. durchlaufenden Vierpilzplatte betrachtet, die gleichmäßig belastet und von vier unendlich dünnen, symmetrisch zu den Mittellinien gelegenen Säulen gestützt wird. Da wir bei der dort verwendeten *Fourier*schen Methode bereits von der Voraussetzung rechteckiger Stützflächen ausgegangen sind, den Grenzübergang zu unendlich kleinen Flächen aber schon bei der Aufstellung der Druckfunktion vorgenommen haben, können wir unmittelbar von dem ersten Ansatz wieder ausgehen und die Durchbiegungsfunktion w durch eine Summe dreier Reihen, zweier einfacher und einer Doppelreihe darstellen. Es wird dann die nächste und nicht ganz einfach zu lösende Aufgabe sein, diese Reihen teilweise zu summieren, oder in einfache, gut konvergierende Reihen umzuformen, wobei sich dann ganz zwanglos die Unterscheidung der verschiedenen Felder der Plattenebene ergibt, in denen die w-Funktion verschiedene Formen annimmt. Bei der Umrechnung werden wir einige Reihenformeln benutzen, die sich aus den früher gegebenen Formeln durch Integration gewinnen lassen [2].

2. Aufstellung zweier grundlegender Reihenformeln. Bei der Behandlung der Vierpilzplatte mit kleinen Stützflächen ist folgende Reihenformel benutzt worden:

$$\sum_n \frac{\cos n\gamma}{(n^2+\omega^2)^2} = \pi \frac{\omega\pi \operatorname{Cof}\omega\gamma + 2 \operatorname{Sin}\omega\frac{\pi}{2}\left[\omega\gamma \operatorname{Sin}\omega\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) + \operatorname{Cof}\omega\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\right]}{16\,\omega^3 \operatorname{Sin}^2\omega\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\,\omega^4} \qquad (1)$$

$$(0 \leq \gamma < \pi),$$

wobei n die Folge der geraden Zahlen durchläuft. Mit $\omega = 0$ erhalten wir daraus

$$\sum_{n=2,4,6} \frac{\cos n\gamma}{n^4} = \frac{1}{48}\left(\frac{\pi^4}{30} - \pi^2\gamma^2 + 2\pi\gamma^3 - \gamma^4\right) \qquad (2)$$

oder mit $\gamma = \pi\varrho$

$$\sum \frac{\cos n\pi\varrho}{n^3} = \frac{\pi^4}{48}\left(\frac{1}{30} - \varrho^2 + 2\varrho^3 - \varrho^4\right). \qquad (2a)$$

Integrieren wir jetzt beide Seiten von (1) nach γ von 0 bis γ, so erhalten wir die neue Formel

$$\sum_{n=2,4,6\ldots} \frac{\sin n\gamma}{n(n^2+\omega^2)^2} = \frac{\pi}{16\,\omega^4 \operatorname{Sin}^2\omega\frac{\pi}{2}}\left\{\pi\omega \operatorname{Sin}\omega\gamma - 2\operatorname{Sin}\omega\frac{\pi}{2}\left[2\operatorname{Sin}\omega\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) + \omega\gamma \operatorname{Cof}\omega\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\right]\right\} + \frac{1}{2\,\omega^4}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right). \qquad (3)$$

Ebenso folgt aus (2)

$$\sum_{n=2,4\ldots} \frac{\sin n\gamma}{n^5} = \frac{1}{48}\left[\frac{\pi^4\gamma}{30} - \frac{1}{3}\pi^2\gamma^3 + \frac{1}{2}\pi\gamma^4 - \frac{1}{5}\gamma^5\right] \qquad (4)$$

oder

$$\sum_{n=2,4\ldots} \frac{\sin n\pi\varrho}{n^5} = \frac{\pi^5}{48}\left[\frac{\varrho}{30} - \frac{1}{3}\varrho^3 + \frac{1}{2}\varrho^4 - \frac{1}{5}\varrho^5\right]. \qquad (4a)$$

3. Aufstellung der Reihen. Wir wählen das Bezugssystem wieder so (Abb. 1), daß der Anfangspunkt in der linken unteren Ecke des Grundrechtecks liegt, dessen Seiten a und b sind und die Achsen mit zwei Rechtecksseiten zusammenfallen. In den Rechnungen werden wir statt x und y meist die dimensionslosen Größen $x/a = \xi$, $y/a = \eta$ verwenden, und das Seitenverhältnis b/a soll mit λ bezeichnet werden. Ferner mögen die rechteckigen Stützflächen der

[1] *W. Müller*, Ing.-Archiv 22/1954, S. 60; vgl. auch Oesterr. Ing.-Archiv, 8 (1954) S. 1.
[2] Vgl. auch *W. Müller*, Oesterr. Ing.-Archiv, 6 (1953), S. 404.

Säulen mit den Mittelpunktskoordinaten ξ_0, η_0; $1-\xi_0, \eta_{0i}$, $\xi_0, \lambda-\eta_0$; $1-\xi_0, \lambda-\eta_0$ die Seitenlängen $2a\alpha$ und $2a\beta$ haben und dem Grundrechteck parallel liegen. Die gleichmäßige Belastung der Platte je Längeneinheit sei p_0. Bei einem Stützdruck q der Säulen haben wir die Gleichgewichtsbedingung

$$p_0 a b = 16 q a^2 \alpha\beta \quad \text{oder} \quad p_0 \lambda = 16 q \alpha\beta .$$

Mit Hilfe der mehrfach angewendeten *Fourier*schen Methode haben wir für die Druckfunktion folgende Entwicklung gefunden:

$$\left.\begin{aligned} p(\xi\eta) = -\frac{2p_0}{\pi}\Bigg[&\frac{1}{\alpha}\sum_m \frac{1}{m}\sin m\pi\alpha\cos m\pi\xi_0\cos m\pi\xi + \frac{\lambda}{\beta}\sum\frac{1}{n}\sin n\pi\frac{\beta}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda}\\ &+\frac{2\lambda}{\alpha\beta\pi}\sum_m\sum_m\frac{1}{mn}\sin m\pi\alpha\cos m\pi\xi_0\cos m\pi\xi\sin n\pi\frac{\beta}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda}\Bigg]\\ &(m, n = 2, 4, 6\ldots)\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Daraus leitet sich dann mit Hilfe der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta w = \frac{1}{a^4}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}\right)^2 = \frac{p(\xi\eta)}{N} \qquad \left(N=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\right) \quad (6)$$

folgender Ausdruck für die Durchbiegung der Vierpilzplatte ab:

$$\left.\begin{aligned} w = w_0 - \frac{2p_0a^4}{N\pi^5}\Bigg[&\frac{1}{\alpha}\sum_m\frac{1}{m^5}\sin m\pi\alpha\cos m\pi\xi_0\cos m\pi\xi + \frac{\lambda^5}{\beta}\sum\frac{1}{n^5}\sin n\pi\frac{\beta}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda}\\ &+\frac{2\lambda^5}{\alpha\beta\pi^6}\sum_m\sum_n\frac{1}{mn(m^2\lambda^2+n^2)^2}\sin m\pi\alpha\cos m\pi\xi_1\cos m\pi\xi\sin n\pi\frac{\beta}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda}\Bigg]\\ = w_0 + w_\xi + w_\eta + w_{\xi\eta} \qquad &(m, n = 2, 4, 6\ldots).\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

dessen wesentliche Umgestaltung unsere nächste Aufgabe bilden soll.

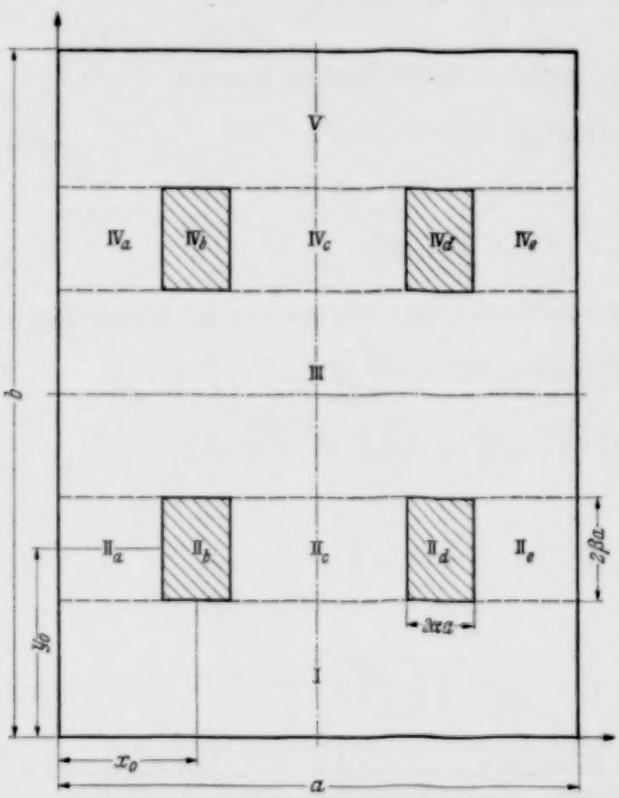

Abb. 1. Feldereinteilung der Vierpilzplatte.

4. Umformung der Reihen im Gebiet I. Wir wenden uns zunächst der Doppelreihe $w_{\xi\eta}$ zu und wollen versuchen, die auf die Variable η und die Laufzahl n sich beziehende Teilreihe mit Hilfe der Formeln (3) und (4) zu summieren. Wie man bei der Anwendung dieser Formeln sofort erkennen wird, ist es erforderlich, wie ja auch aus der gewöhnlichen Statik bekannt ist, verschiedene Gebiete oder Felder zu unterscheiden, wobei wir uns zunächst beschränken wollen auf das von achsenparallelen Geraden begrenzte Flächenstück, welches die Stützfläche um den Punkt $\xi_0\,\eta_0$ enthält und bis zur angrenzenden Stützfläche reicht (Abb. 1). Wir haben dann

Gebiet *I*: $0 < \eta < \eta_0 - \beta$;
Gebiet *II*: $\eta_0 - \beta < \eta < \eta_0 + \beta$;
Gebiet *III*: $\eta_0 + \beta < \eta < \lambda - \eta_0 - \beta$.

Im Gebiet *I* kann man die Reduktion auf die Formel (3) durch die Darstellung

$$\begin{aligned}&\sin n\pi\frac{\beta}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda}\\ &=\frac{1}{4}\left[\sin\frac{n\pi}{\lambda}(\eta_0+\beta+\eta)+\sin\frac{n\pi}{\lambda}(\eta_1+\beta-\eta)\right.\\ &\left.-\sin\frac{n\pi}{\lambda}(\eta_0-\beta+\eta)-\sin\frac{n\pi}{\lambda}(\eta_0-\beta-\eta)\right] \quad (8)\end{aligned}$$

erreichen. Wenn man dann auch auf die Funktionen $f(\gamma)$ der rechten Seite der Formel (3) die Operation

$$D_I(f)=\frac{1}{4}\left\{f\left[\frac{\pi}{\lambda}(\eta_0+\beta+\eta)\right]+f\left[\frac{\pi}{\lambda}(\eta_0+\beta-\eta)\right]-f\left[\frac{\pi}{\lambda}(\eta_0-\beta+\eta)\right]-f\left[\frac{\pi}{\lambda}(\eta_0-\beta-\eta)\right]\right\} \quad (9)$$

anwendet, so gewinnt man mit $\omega = m\lambda$ aus den Ausdrücken

$$f_1 = \pi\omega \operatorname{Sin}\omega\gamma\,, \quad f_2 = \operatorname{Sin}\omega\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right), \quad f_3 = \omega\gamma \operatorname{Cof}\omega\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$$

folgende neue Funktionen:

$$\begin{aligned} F_1 &= D_I(f_1) \\ &= \frac{1}{4}\pi\lambda m[\operatorname{Sin} m\pi(\eta_0+\beta+\eta)+\operatorname{Sin} m\pi(\eta_0+\beta-\eta)-\operatorname{Sin} m\pi(\eta_0-\beta+\eta)-\operatorname{Sin} m\pi(\eta_0-\beta-\eta)] \\ &= \pi\lambda m \operatorname{Sin} m\pi\beta \operatorname{Cof} m\pi\eta_0 \operatorname{Cof} m\pi\eta\,, \end{aligned} \tag{10}$$

$$F_2 = D_I(f_2) = -\operatorname{Sin} m\pi\beta \operatorname{Cof} m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta_0\right)\operatorname{Cof} m\pi\eta\,, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} F_3 = D_I(f_3) = \operatorname{Sin} m\pi\beta\Big[& m\pi\eta \operatorname{Sin} m\pi\eta \operatorname{Cof} m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta_0\right)+m\pi\eta_0 \operatorname{Sin} m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta_0\right)\operatorname{Cof} m\pi\eta\Big] \\ & + m\pi\beta \operatorname{Cof} m\pi\beta \operatorname{Cof} m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta_0\right)\operatorname{Cof} m\pi\eta\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Der von η unabhängige Ausdruck $\frac{1}{2\omega^4}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$ führt dagegen auf

$$D_I\left[\frac{1}{2\omega^4}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\right] = -\frac{\beta}{2\lambda}\frac{\pi}{(\lambda m)^4}\,. \tag{13}$$

Dann sieht man aber bei Multiplikation mit $\frac{1}{m}\sin m\pi\alpha\cos m\pi\xi_0\cos m\pi\xi$ und dem konstanten Faktor, daß man wieder auf die Reihe $-w_\xi$ kommt, die sich daher mit der ersten Reihe w_ξ aufhebt. Nach Abspaltung dieser Reihe $-w_\xi$ bleibt daher von $w_{\xi\eta}$ folgende Restreihe übrig:

$$\begin{aligned} (w_3)_I = & -\frac{p_0 a^4 \lambda}{4 N \alpha\beta\pi^5}\sum_{m=2,4,6}\frac{\sin m\pi\alpha\cos m\pi\xi_0\cos m\pi\xi}{m^5 \operatorname{Sin} m\pi\frac{\lambda}{2}}\Bigg\{\frac{m\pi\lambda \operatorname{Sin} m\pi\beta \operatorname{Cof} m\pi\eta_0 \operatorname{Cof}\pi\eta}{\operatorname{Sin} m\pi\frac{\lambda}{2}} \\ & + 2\operatorname{Cof} m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta_0\right)[\operatorname{Cof} m\pi\eta(2\operatorname{Sin} m\pi\beta - m\pi\beta\operatorname{Cof} m\pi\beta) - m\pi\eta \operatorname{Sin} m\pi\beta \operatorname{Sin} m\pi\eta] \\ & + 2 m\pi\eta_0 \operatorname{Sin} m\pi\beta \operatorname{Sin} m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta_0\right)\operatorname{Cof} m\pi\eta\Bigg\} \\ = & -\frac{p_0 a^4 \lambda}{4 N \alpha\beta\pi^5}\sum_{m=2,4,6}\frac{\sin m\pi\alpha\cos m\pi\xi_0\cos m\pi\xi}{m^5 \operatorname{Sin} m\pi\frac{\lambda}{2}}\, Y_I(\eta\,\eta_0)\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Wenn man nun zur Umgestaltung der zweiten Reihe $w_\eta = w_2$ die Gleichung (8) und dann die D_I-Operation auf die rechte Seite der Formel (4) anwendet, so ergibt sich an Stelle der in w_2 auftretenden Summe eine ganze rationale Funktion von η. Betrachten wir z. B. die dritte Potenz von ϱ auf der rechten Seite von (4), so kommt durch Anwendung der D_I-Operation

$$\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\eta_0+\eta+\beta}{\lambda}\right)^3+\left(\frac{\eta_0+\beta-\eta}{\lambda}\right)^3-\left(\frac{\eta_0-\beta+\eta}{\lambda}\right)^3-\left(\frac{\eta_0-\beta-\eta}{\lambda}\right)^3\right] = \frac{1}{\lambda^3}[3\beta(\eta^2+\eta_0^2)+\beta^3]\,. \tag{15}$$

Führt man diese Operation auf die übrigen Potenzen ϱ, ϱ^4, ϱ^5 aus, so entsteht schließlich für w_2 folgender Ausdruck:

$$(w_2)_I = \frac{p_0 a^4}{24 N}[\eta^4+\lambda^2\eta^2-6\eta_0\lambda^2(\lambda-\eta_0)+\eta_0^2(\lambda-\eta_0)^2+2\beta^2(\eta^2+\eta_0^2-\lambda\eta_0)] = \frac{p_0 a^4}{24 N}H_I(\eta)\,. \tag{16}$$

Das ist natürlich eine partikuläre Lösung unserer Differentialgleichung, nämlich die Darstellung der Biegefläche eines in der x-Richtung unendlich langen Plattenstreifens von der Breite b, der gleichmäßig belastet und längs zweier symmetrisch zur Mittellinie gelegenen Streifen von der Breite $2a\beta$ gestützt wird (Abb. 2). w_2 kann auch als Ordinate der elastischen Linie eines entsprechend belasteten linearen Balkens gewonnen werden. Im Ganzen haben wir also folgende Durchbiegungsfunktion unserer Vierpilzplatte im Gebiet I $(0 < \eta < \eta_0 - \beta)$:

$$w_I = w_0 + \frac{p_0 a^4}{24 N}[\eta^4 + \lambda^2\eta^2 - 6\eta_0\lambda^2(\lambda-\eta_0) + \eta_0^2(\lambda-\eta_0)^2 + 2\beta^2(\eta^2+\eta_0^2-\lambda\eta_0)] - \frac{p_0 a^4 \lambda}{4 N \lambda \beta \pi^5} \sum_{m=2,4,6} \frac{\sin m\pi\lambda \cos m\pi\xi_0 \cos m\pi\xi}{m^5 \operatorname{Sin} m\pi\frac{\lambda}{2}} Y_I(\eta\,\eta_0\,\beta). \tag{17}$$

5. Die Durchbiegung in den Gebieten III und II. Betrachten wir zunächst das Gebiet *III*, so müssen wir hier ausgehen von der Darstellung

$$\sin n\pi\frac{\beta}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda} = \frac{1}{4}\left[\sin\frac{n\pi}{\lambda}(\eta_0+\beta+\eta) - \sin\frac{n\pi}{\lambda}(\eta-\eta_0-\beta) - \sin\frac{n\pi}{\lambda}(\eta-\eta_0+\beta) - \sin\frac{n\pi}{\lambda}(\eta+\eta_0-\beta)\right]. \tag{18}$$

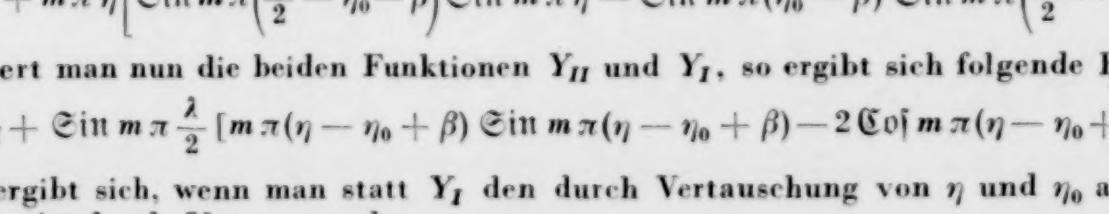

Abb. 2. Plattenstreifen.

Man sieht aber, daß der rechts stehende Ausdruck sich von dem entsprechenden in (8) nur durch Vertauschung der Größen η und η_0 unterscheidet. Man schließt daraus, daß auch der vollständige Ausdruck für die Durchbiegung, d.h. w_{III} aus w_I dadurch hervorgeht, daß man η und η_0 mit einander vertauscht. Wir werden den Wert in der Zusammenfassung angeben. Etwas schwieriger und weniger symmetrisch gestalten sich die Rechnungen für das die Stützfläche enthaltende Gebiet II ($\eta_0 - \beta < \eta < \eta_0 + \beta$). Man muß hier ausgehen von der Gleichung

$$\sin n\pi\frac{\beta}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta_0}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda} = \frac{1}{4}\left[\sin\frac{n\pi}{\lambda}(\eta_0+\beta+\eta) + \sin\frac{n\pi}{\lambda}(\eta_0+\beta-\eta) + \sin\frac{n\pi}{\lambda}(\eta-\eta_0+\beta) - \sin\frac{n\pi}{\lambda}(\eta+\eta_0-\beta)\right] = D_{II}(\sin n\gamma). \tag{19}$$

Wendet man dann auch auf die rechte Seite von (3) die D_{II}-Operation an, so erhält man nach etwas umständlicher, aber nicht schwieriger Rechnung folgenden Ausdruck:

$$(w_3)_{II} = -\frac{p_0 a^4 \lambda}{4 N \lambda \beta \pi^5} \sum_{m=2,4,6\ldots} \frac{\sin m\pi\lambda \cos m\pi\xi_0 \cos m\pi\xi}{m^5 \operatorname{Sin} m\pi\frac{\lambda}{2}} Y_{II}(\eta\,\eta_0\,\beta)$$

mit

$$Y_{II} = \frac{m\pi\lambda \operatorname{Sin} m\pi\beta \operatorname{Cof} m\pi\eta_0 \operatorname{Cof} m\pi\eta}{\operatorname{Sin} m\pi\frac{\lambda}{2}} - 2\operatorname{Sin} m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta_0-\beta\right)\operatorname{Cof} m\pi\eta - 2\operatorname{Sin} m\pi(\eta_0-\beta)\operatorname{Cof} m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta\right) - m\pi(\eta_0+\beta)\operatorname{Cof} m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta_0-\beta\right)\operatorname{Cof} m\pi\eta + m\pi(\eta_0-\beta)\operatorname{Cof} m\pi(\eta_0-\beta)\operatorname{Cof} m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta\right) + m\pi\eta\left[\operatorname{Sin} m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta_0-\beta\right)\operatorname{Sin} m\pi\eta - \operatorname{Sin} m\pi(\eta_0-\beta)\operatorname{Sin} m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta\right)\right]. \tag{20}$$

Subtrahiert man nun die beiden Funktionen Y_{II} und Y_I, so ergibt sich folgende Beziehung:

$$Y_{II} = Y_I + \operatorname{Sin} m\pi\frac{\lambda}{2}[m\pi(\eta-\eta_0+\beta)\operatorname{Sin} m\pi(\eta-\eta_0+\beta) - 2\operatorname{Cof} m\pi(\eta-\eta_0+\beta)]. \tag{21}$$

Ebenso ergibt sich, wenn man statt Y_I den durch Vertauschung von η und η_0 aus Y_I abgeleiteten Ausdruck Y_{III} verwendet,

$$Y_{II} = Y_{III} + \operatorname{Sin} m\pi\frac{\lambda}{2}[m\pi(\eta-\eta_0-\beta)\operatorname{Sin} m\pi(\eta-\eta_0-\beta) - 2\operatorname{Cof} m\pi(\eta-\eta_0-\beta)]. \tag{22}$$

Daraus erkennt man dann, daß an der Grenze zwischen *I* und *II* ($\eta = \eta_0 - \beta$)

$$Y_{II} = Y_I - 2\operatorname{Sin} m\pi\frac{\lambda}{2}$$

und an der Grenze zwischen *II* und *III* für $\eta = \eta_0 + \beta$ dieselbe Differenz entsteht. Um also einen stetigen Übergang von w_2 an beiden Grenzen zu erzielen, muß man zu Y_{II} noch die von η unabhängige Größe $2\,\mathfrak{Sin}\, m\pi\frac{\lambda}{2}$ hinzufügen. Welche Auswirkung das für die weitere Unterscheidung innerhalb des Gebietes *II* hat, werden wir weiter unten besprechen.

Zunächst müssen wir noch die Funktion w_2 den Bedingungen des Gebietes *II* anpassen, Durch Anwendung der D_{II}-Operation entsteht folgender Wert:

$$(w_2)_{II} = \frac{p_0 a^4}{24 N \beta}\left\{\beta\left[\eta^4 + \lambda^2\eta^2 + \eta_0^2(\lambda-\eta_0)^2 - 6\eta_0\eta^2(\lambda-\eta_0) + 2\beta^2(\eta^2+\eta_0^2-\lambda\eta_0)\right] - \frac{\lambda}{4}(\eta-\eta_0+\beta)^4\right\}$$

$$= \frac{p_0 a^4}{24 N\beta}\left[\beta H_I(\eta\eta_0) - \frac{\lambda}{4}(\eta-\eta_0+\beta)^4\right] = \frac{p_0 a^4}{24 N\beta}\left[\beta H_{III}(\eta\eta_0) - \frac{\lambda}{4}(\eta-\eta_0-\beta)\right]. \qquad (23))$$

Der Klammerausdruck ist bereits so umgestaltet worden, daß der erste Teil die entsprechende, im Gebiet *I*, bzw. *III* gültige Funktion H_I, bzw. H_{III} enthält. Aus dem Zusatzglied sieht man dann ohne weiteres, daß an beiden Grenzen des Gebietes $\eta = \eta_0 - \beta$ und $\eta = \eta_0 + \beta$ ein stetiger Übergang sowohl der Biegewerte als auch ihrer ersten Ableitungen nach η stattfindet.

6. Aufteilung des Gebietes II. Die in Ziff. **5** besprochene, aus Stetigkeitsgründen geforderte Hinzufügung der Konstanten $2\,\mathfrak{Sin}\, m\pi\frac{\lambda}{2}$, die auch im Nenner der Summe vorkommt, ist, wie man sieht, gleichbedeutend mit der Abspaltung der auf die Variable ξ sich beziehende Reihe

$$w_1 = -\frac{p_0 a^4 \lambda}{2 N \alpha\beta\pi^5}\sum_{m=2,4,6}\frac{\sin m\pi\alpha\cos m\pi\xi_0\cos m\pi\xi}{m^5}. \qquad (24)$$

Auf diese Reihe kann man aber wieder die Formel (4) anwenden und erhält dann, wenn man die drei Gebiete unterscheidet

$$II_a: 0 < \xi < \xi - \alpha, \quad II_b: \xi_0 - \alpha < \xi < \xi_0 + \alpha; \quad II_c: \xi_0 + \alpha < \xi < 1 - \xi - \xi_0,$$

in vollständiger Analogie zu der Umwandlung der w_2-Reihe w folgende Werte für w_1:

$$\left.\begin{aligned}
(w_1)_{II_a} &= \frac{p_0 a^4\lambda}{96 N\beta}[\xi^4 + \xi^2 - 6\xi_0\xi^2(1-\xi_0) + \xi_0^2(1-\xi_0)^2 + 2\alpha^2(\xi^2+\xi_0^2-\xi_0)] = \frac{p_0 a^4\lambda}{96 N\beta}G_{II_a},\\
(w_1)_{II_c} &= \frac{p_0 a^4\lambda}{96 N\beta}[\xi^2(1-\xi)^2 - 6\xi\xi_0^2(1-\xi) + 2\alpha^2(\xi^2+\xi_0^2-\xi) + \xi_0^4 + \xi_0^2] = \frac{p_0 a^4\lambda}{96 N\beta}G_{II_c},\\
(w_1)_{II_b} &= \frac{p_0 a^4\lambda}{96 N\beta\alpha}\left[\alpha G_{II_a} - \frac{1}{4}(\xi-\xi_0+\alpha)^4\right] = \frac{p_0 a^4\lambda}{96 N\alpha\beta}\left[\alpha G_{II_c} - \frac{1}{4}(\xi-\xi_0-\alpha)^4\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

7. Zusammenstellung der w-Funktionen in den verschiedenen Gebieten. Nach den bisherigen Aufstellungen sind wir in der Lage, die Funktionen w für die Durchbiegung einer Vierpilzplatte in den fünf Gebieten *I*, *III* II_a, II_b, II_c übersichtlich zusammenzustellen. Wir haben

$$\left.\begin{aligned}
w_I &= w_0 + \frac{p_0 a^4}{24 N}H_I(\eta\eta_0) - \frac{p_0 a^4\lambda}{4 N\alpha\beta\pi^5}\sum_m\frac{\sin m\pi\alpha\cos m\pi\xi_0\cos m\pi\xi}{m^5\,\mathfrak{Sin}\, m\pi\frac{\lambda}{2}}Y_I^{(m)}(\eta\eta_0),\\
w_{III} &= w_0 + \frac{p_0 a^4}{24 N}H_{III}(\eta\eta_0) - \frac{p_0 a^4\lambda}{4 N\alpha\beta\pi^5}\sum_m\frac{\sin m\pi\alpha\cos m\pi\xi_0\cos m\pi\xi}{m^5\,\mathfrak{Sin}\, m\pi\frac{\lambda}{2}}Y_{III}^{(m)}(\eta\eta_0),\\
w_{II_a} &= w_0 + \frac{p_0 a^4\lambda}{96 N\beta}G_{II_a} + \frac{p_0 a^4}{24 N}H_{II} - \frac{p_0 a^4\lambda}{4 N\alpha\beta\pi^5}\sum_m\frac{\sin m\pi\alpha\cos m\pi\xi_0\cos m\pi\xi}{m^5\,\mathfrak{Sin}\, m\pi\frac{\lambda}{2}}Y_{II}^{(m)}(\eta\eta_0),\\
w_{II_b} &= w_0 + \frac{p_0 a^4\lambda}{96 N\beta}G_{II_b} + \frac{p_0 a^4}{24 N}H_{II} - \frac{p\,a^4\lambda}{4 N\alpha\beta\pi^5}\sum_m\frac{\sin m\pi\alpha\cos m\pi\xi_0\cos m\pi\xi}{m^5\,\mathfrak{Sin}\, m\pi\frac{\lambda}{2}}Y_{II}^{(m)}(\eta\eta_0),\\
w_{II_c} &= w_0 + \frac{p_0 a^4\lambda}{96 N\beta}G_{II_c} + \frac{p_0 a^4}{24 N}H_{II} - \frac{p_0 a^4\lambda}{4 N\alpha\beta\pi^5}\sum_m\frac{\sin m\pi\alpha\cos m\pi\xi_0\cos m\pi\xi}{m^5\,\mathfrak{Sin}\, m\pi\frac{\lambda}{2}}Y_{II}^{(m)}(\eta\eta_0)
\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

$$(m = 2, 4, 6\ldots).$$

Die eingeführten Funktionen haben dabei folgende Bedeutung und Beziehungen zu einander:

$$
\left.\begin{aligned}
Y_I^{(m)} &= \frac{m\pi\lambda\,\mathfrak{Sin}\,m\pi\beta\,\mathfrak{Cof}\,m\pi\eta_0\,\mathfrak{Cof}\,m\pi\eta}{\mathfrak{Sin}\,m\pi\frac{\lambda}{2}} \\
&\quad + 2\,\mathfrak{Cof}\,m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta_0\right)[\mathfrak{Cof}\,m\pi\eta(2\,\mathfrak{Sin}\,m\pi\beta - m\pi\beta\,\mathfrak{Cof}\,m\pi\beta) \\
&\quad - m\pi\eta\,\mathfrak{Sin}\,m\pi\beta\,\mathfrak{Sin}\,m\pi\eta] + 2\,m\pi\eta_0\,\mathfrak{Sin}\,m\pi\beta\,\mathfrak{Sin}\,m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta_0\right)\mathfrak{Cof}\,m\pi\eta\,, \\
Y_{III}^{(m)} &= \frac{m\pi\lambda\,\mathfrak{Sin}\,m\pi\beta\,\mathfrak{Cof}\,m\pi\eta_0\,\mathfrak{Cof}\,m\pi\eta}{\mathfrak{Sin}\,m\pi\frac{\lambda}{2}} \\
&\quad + 2\,\mathfrak{Cof}\,m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta\right)[\mathfrak{Cof}\,m\pi\eta_0(2\,\mathfrak{Sin}\,m\pi\beta - m\pi\beta\,\mathfrak{Cof}\,m\pi\beta) \\
&\quad - m\pi\eta_0\,\mathfrak{Sin}\,m\pi\beta\,\mathfrak{Sin}\,m\pi\eta_0] + 2\,m\pi\eta\,\mathfrak{Sin}\,m\pi\beta\,\mathfrak{Cof}\,m\pi\eta_0\,\mathfrak{Sin}\,m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta\right), \\
Y_{II}^{(m)} &= Y_I^{(m)} + \mathfrak{Sin}\,m\pi\frac{\lambda}{2}\,[m\pi(\eta-\eta_0+\beta)\,\mathfrak{Sin}\,m\pi(\eta-\eta_0+\beta) - 2\,\mathfrak{Cof}\,m\pi(\eta-\eta_0+\beta)], \\
&= Y_{III}^{(m)} + \mathfrak{Sin}\,m\pi\frac{\lambda}{2}\,[m\pi(\eta-\eta_0-\beta)\,\mathfrak{Sin}\,m\pi(\eta-\eta_0-\beta) - 2\,\mathfrak{Cof}\,m\pi(\eta-\eta_0-\beta)]\,, \\
H_I &= \eta^4 + \lambda^2\eta^2 - 6\,\eta_0(\lambda-\eta_0)\,\eta^2 + \eta_0^2(\lambda-\eta_0)^2 + 2\,\beta^2(\eta^2+\eta_0^2-\lambda\,\eta_0)\,, \\
H_{III} &= \eta_0^4 + \lambda^2\eta_0^2 - 6\,\eta(\lambda-\eta)\,\eta_0^2 + \eta^2(\lambda-\eta)^2 + 2\,\beta^2(\eta^2+\eta_0^2-\lambda\,\eta)\,, \\
\beta\,H_{II} &= \beta\,H_I - \frac{\lambda}{4}(\eta-\eta_0+\beta)^4 = \beta\,H_{III} - \frac{\lambda}{4}(\eta-\eta_0-\beta)^4\,, \\
G_{II_a} &= \xi^4 + \xi^2 - 6\,\xi_0(1-\xi_0)\,\xi^2 + \xi_0^2(1-\xi_0)^2 + 2\,\alpha^2(\xi^2+\xi_0^2-\xi_0)\,, \\
G_{II_c} &= \xi_0^4 + \xi_0^2 - 6\,\xi(1-\xi)\,\xi_0^2 + \xi^2(1-\xi)^2 + 2\,\alpha^2(\xi^2+\xi_0^2-\xi)\,, \\
\alpha\,G_{II_b} &= \alpha\,G_{II_a} - \frac{1}{4}(\xi-\xi_0+\alpha)^4 = \alpha\,G_{II_c} - \frac{1}{4}(\xi-\xi_0-\alpha)^4\,.
\end{aligned}\right\} \quad (27)
$$

Aus Symmetriegründen gelingt es nun leicht, auch für die noch fehlenden acht Felder (vgl. Abb. 1) die entsprechenden Funktionen für die Durchbiegung aufzustellen. So erhält man w_V für das dem Felde I gegenüberliegende Feld V, ebenso w_{IV} aus w_I bzw. aus w_{II} durch Ersetzung von η durch $\lambda - \eta$. Ebenso ergibt sich w in den noch übrigen beiden Feldern von II, nämlich II_d und II_e aus w_{II_b} und w_{II_a} dadurch, daß man ξ durch $1 - \xi$ ersetzt. Damit ist die Durchbiegung w in allen 13 Feldern der Vierpilzplatte festgelegt und gleichzeitig ist auch der stetige Übergang an den Grenzlinien zwischen diesen Feldern berücksichtigt.

Die Form der Darstellung kann noch dadurch etwas abgeändert werden, daß man statt m die Ganze Zahl $2n$ einsetzt, wobei dann die Laufzahl n die ganze Zahlenreihe von 1 bis ∞ durchläuft. So erhält man z. B. für das Gebiet I die Durchbiegung

$$
\begin{aligned}
w_I &= \frac{p_0 a^4}{24 N}[\eta^4 + \lambda^2\eta^2 - 6\,\eta_0(\lambda-\eta_0)\,\eta^2 + 2\,\beta^2(\eta^2+\eta_0^2-\lambda\,\eta_0) + \eta_0^2(\lambda-\eta_0)^2] \\
&\quad - \frac{p_0 a^4 \lambda}{64 N \alpha\beta\pi^5}\sum_n{}' \frac{\sin 2n\pi\alpha\cos 2n\pi\xi_0\cos 2n\pi\xi}{n^5\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\lambda}\Big\{\frac{n\pi\lambda\,\mathfrak{Sin}\,2n\pi\beta\,\mathfrak{Cof}\,2n\pi\eta_0\,\mathfrak{Cof}\,2n\pi\eta}{\mathfrak{Sin}\,n\pi\lambda} \\
&\quad + \mathfrak{Cof}\,2n\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta_0\right)[\mathfrak{Cof}\,2n\pi\eta(2\,\mathfrak{Sin}\,2n\pi\beta - 2n\pi\beta\,\mathfrak{Cof}\,2n\pi\beta) - 2n\eta\,\mathfrak{Sin}\,2n\pi\beta\,\mathfrak{Sin}\,2n\pi\eta] \\
&\quad + 2n\pi\eta_0\,\mathfrak{Sin}\,2n\pi\beta\,\mathfrak{Sin}\,2n\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta_0\right)\mathfrak{Cof}\,2n\pi\eta\Big\} \qquad (n = 1, 2, 3\ldots)\,.
\end{aligned} \quad (28)
$$

Mit $\alpha = \beta = 0$ geht dieser Ausdruck in Übereinstimmung mit einer früheren Aufstellung über in

$$
\left.\begin{aligned}
w_I &= \frac{p_0 a^4}{24 N}[\eta^4 + \lambda^2\eta^2 - 6\,\eta_0(\lambda-\eta_0)\,\eta^2 + \eta_0^2(\lambda-\eta_0)^2] - \frac{p_0 a^4 \lambda}{16 N \pi^3}\sum_{n=1,2\ldots}{}' \frac{\cos 2n\pi\xi_0\cos 2n\pi\xi}{n^3\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\lambda} \\
&\quad \cdot\left[\frac{n\pi\lambda\,\mathfrak{Cof}\,2n\pi\eta_0\,\mathfrak{Cof}\,2n\pi\eta}{\mathfrak{Sin}\,n\pi\lambda} + \mathfrak{Cof}\,2n\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta_0\right)(\mathfrak{Cof}\,2n\pi\eta - 2n\pi\eta\,\mathfrak{Sin}\,2n\pi\eta)\right. \\
&\quad \left. + 2n\pi\eta_0\,\mathfrak{Sin}\,2n\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta_0\right)\mathfrak{Cof}\,2n\pi\eta\right].
\end{aligned}\right\} \quad (29)
$$

Dieser Fall $\alpha = \beta = 0$ gibt noch Anlaß zu einigen Bemerkungen. Man sieht, daß in den Formeln z. B. für das Feld *IIa*, das mit der Grenze zwischen *I* und *III* zusammenfällt, eine scheinbare Unbestimmtheit auftritt, die sich aber auf Grund unserer bisherigen Entwickelungen leicht auflösen läßt. Bedenkt man nämlich, daß für $\beta = 0$, $Y_{II} = Y_I - 2\,\mathfrak{Sin}\, m\pi\frac{\lambda}{2}$ wird, so sieht man, daß außer der mit Y_I geschriebenen Reihe und dem η enthaltenden Glied w_2 noch folgende beiden Glieder übrig b'eiben:

$$\frac{p_0 a^4 \lambda}{96 N \beta} G_{II_a} + \frac{p_0 a^4 \lambda}{2 N \beta} \sum_{m=2,4\ldots} \frac{\cos m\pi\xi_0 \cos m\pi\xi}{m^4}, \tag{30}$$

die aber zusammen Null ergeben, wenn man die Formel (2) darauf anwendet, sodaß das Ergebnis wieder mit w_I für $\eta = \eta_0$ übereinstimmt.

Unter den vielen weiteren Sonderfällen, die in den allgemeinen Formeln enthalten sind, erwähnen wir noch den Fall $\alpha = \xi_0 = 1/4$, bei dem je zwei der von der x-Achse gleich weit abstehende Stützflächen zusammenrücken. Es bleiben dann zwei Stützstreifen übrig, die sich in der x-Richtung über die ganze Platte erstrecken (Abb. 3).

Da aber in diesem Falle das Produkt

$$\sin\frac{m\pi}{4}\cos\frac{m\pi}{4} = \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}m\pi$$

für gerade m gleich Null wird, so verschwindet auch die gesamte Summe des letzten Gliedes in dem Ausdruck für w. Ferner reduziert sich aber die Funktion G_{II_b} auf eine Konstante. Es ergibt sich also, daß nur die Lösung für einen Plattenstreifen übrig bleibt, der die Breite b hat und in der x-Richtung ins Unendliche erstreckt.

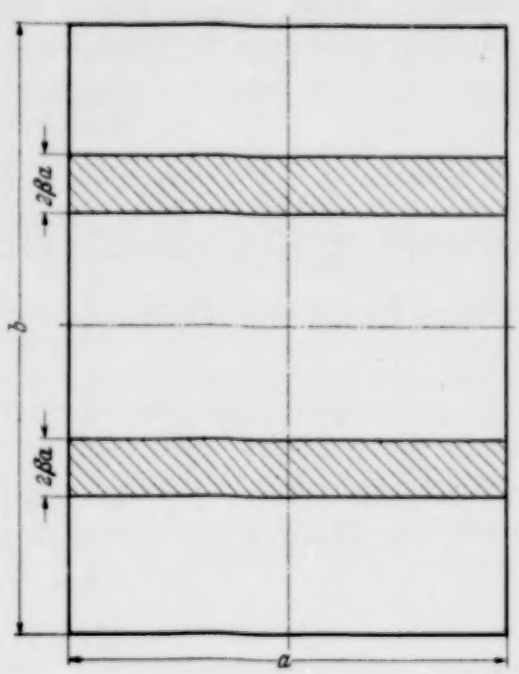

Abb. 3. Der Fall $\xi_0 = \alpha = \frac{1}{4}$.

8. Die Berechnung der Momente. Mit Hilfe der entwickelten Formeln für die Durchbiegung kann man die Momentensumme ohne Schwierigkeiten ableiten. Es dürfte genügen, wenn wir die Ergebnisse der Rechnung übersichtlich zusammenstellen:

$$\left.\begin{aligned}
M_I &= \frac{p_0 a^2}{2} h_I(\eta\,\eta_0) - \frac{p_0 a^2 \lambda}{2\alpha\beta\pi^3} \sum_m \frac{\sin m\pi\alpha \cos m\pi\xi_0 \cos m\pi\xi}{m^3\,\mathfrak{Sin}\, m\pi\frac{\lambda}{2}} P_I^{(m)}(\eta\,\eta_0),\\
M_{III} &= \frac{p_0 a^2}{2} h_{III}(\eta\,\eta_0) - \frac{p_0 a^2 \lambda}{2\alpha\beta\pi^3} \sum_m \frac{\sin m\pi\alpha \cos m\pi\xi_0 \cos m\pi\xi}{m^3\,\mathfrak{Sin}\, m\pi\frac{\lambda}{2}} P_{III}^{(m)}(\eta\,\eta_0),\\
M_{II_a} &= \frac{p_0 a^2 \lambda}{8\beta} g_{II_a}(\xi\,\xi_0) + \frac{p_0 a^2}{2} h_{II}(\eta\,\eta_0) - \frac{p_0 a^2 \lambda}{2\alpha\beta\pi^3} \sum_m \frac{\sin m\pi\alpha \cos m\pi\xi_0 \cos m\pi\xi}{m^3\,\mathfrak{Sin}\, m\pi\frac{\lambda}{2}} P_{II}^{(m)}(\eta\,\eta_0),\\
M_{II_b} &= \frac{p_0 a^2 \lambda}{8\beta} g_{II_b}(\xi\,\xi_0) + \frac{p_0 a^2}{2} h_{II}(\eta\,\eta_0) - \frac{p_0 a^2 \lambda}{2\alpha\beta\pi^3} \sum \frac{\sin m\pi\alpha \cos m\pi\xi_0 \cos m\pi\xi}{m^3\,\mathfrak{Sin}\, m\pi\frac{\lambda}{2}} P_{II}^{(m)}(\eta\,\eta_0),\\
M_{II_c} &= \frac{p_0 a^2 \lambda}{8\beta} g_{II_c}(\xi\,\xi_0) + \frac{p_0 a^2}{2} h_{II}(\eta\,\eta_0) - \frac{p_0 a^2 \lambda}{2\alpha\beta\pi^3} \sum \frac{\sin m\pi\alpha \cos m\pi\xi_0 \cos m\pi\xi}{m^3\,\mathfrak{Sin}\, m\pi\frac{\lambda}{2}} P_{II}^{(m)}(\eta\,\eta_0)
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$(m = 2, 4, 6\ldots).$$

Dabei ist zu setzen

$$\left.\begin{aligned}
P_I^{(m)} &= 2\,\mathfrak{Sin}\, m\pi\beta\,\mathfrak{Cof}\, m\pi\left(\frac{\lambda}{2} - \eta_0\right)\mathfrak{Cof}\, m\pi\eta,\\
P_{III}^{(m)} &= 2\,\mathfrak{Sin}\, m\pi\beta\,\mathfrak{Cof}\, m\pi\eta_0\,\mathfrak{Cof}\, m\pi\left(\frac{\lambda}{2} - \eta\right),
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned}
P_{II}^{(m)} &= -\operatorname{Cof} m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta\right)\operatorname{Sin} m\pi(\eta_0-\beta) - \operatorname{Sin} m\pi\left(\frac{\lambda}{2}-\eta_0-\beta\right)\operatorname{Cof} m\pi\eta\,,\\
&= P_I^{(m)} - \operatorname{Sin} m\pi\frac{\lambda}{2}\operatorname{Cof} m\pi(\eta-\eta_0+\beta) = P_{III}^{(m)} - \operatorname{Sin} m\pi\frac{\lambda}{2}\operatorname{Cof} m\pi(\eta-\eta_0-\beta)\,,\\
h_I &= \lambda\eta_0 - \frac{1}{6}\lambda^2 - \frac{1}{3}\beta^2 - \eta_0^2 - \eta^2\,, \qquad h_{III} = \lambda\eta - \frac{1}{6}\lambda^2 - \frac{1}{3}\beta^2 - \eta^2 - \eta_0^2\,,\\
\beta h_{II} &= \beta h_I - 3\lambda(\eta-\eta_0+\beta)^2 = \beta h_{III} - 3\lambda(\eta-\eta_0-\beta)^2\,,\\
g_{II_a} &= \xi_0 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\alpha^2 - \xi_0^2 - \xi^2\,, \qquad g_{II_c} = \xi - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\alpha^2 - \xi_0^2 - \xi^2\,,\\
\alpha g_{II_b} &= \alpha g_{II_a} - 3(\xi-\xi_0+\alpha)^2 = \alpha g_{II_c} - 3(\xi-\xi_0-\alpha)^2\,.
\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Das Einspannmoment am Ende des Plattenstreifens, der auch als Gesamtlösung für $\xi_0 = \alpha = 1/4$ erscheint, erhält man aus dem ersten Glied von M_I mit $\eta = 0$. In gewöhnlichen Koordinaten hat man, wenn man die halbe Breite des Stützstreifens $\beta a = d$ setzt, zu

$$M_0 = \frac{p_0}{2}\left[b y_0 - \frac{1}{6}b^2 - \frac{1}{3}d^2 - y_0^2\right]. \quad (33)$$

Zu dem Fall $\alpha = \beta = 0$ ist noch zu bemerken, daß hier wieder eine scheinbare Unbestimmtheit auftritt, deren Auflösung zugleich eine gewisse Bestätigung der Rechnung liefert. So haben wir im Gebiet II_a, das sich natürlich auf die Linie reduziert, außer den in I auftretenden Gliedern wegen $(P_{II})_{\beta=0} = -\operatorname{Sin} m\pi\frac{\lambda}{2} + (P_I)_{\beta=0}$ folgende Zusatzglieder:

$$\frac{p_0 a^2\lambda}{8\beta}\left(\xi_0 - \frac{1}{6} - \xi_0^2 - \xi^2\right) + \frac{p_0 a^2\lambda}{\beta\pi^2}\sum\frac{\cos m\pi\xi_0\cos m\pi\xi}{m^2}\,. \quad (34)$$

Setzt man $\cos m\pi\xi_0\cos\pi\xi = \frac{1}{2}[\cos m\pi(\xi_0-\xi) + \cos m\pi(\xi_0+\xi)]$ und beachtet die leicht aus (2) durch Differentiation zu gewinnende *Fourier*sche Entwicklung

$$\sum_{m=2,4,6\ldots}\frac{\cos m\pi\varrho}{m^2} = \frac{\pi^2}{24}[1 - 6\varrho + 6\varrho^2]\,, \quad (35)$$

so stellt man ohne weiteres fest, daß die Glieder (34) sich aufheben oder daß der Wert von M_I $\eta = \eta_0$ übrig bleibt.

Damit sind alle Voraussetzuggen entwickelt für eine weiter gehende Untersuchung der mit der Vierpilzplatte zusammenhängenden Fragen. Insbesondere soll an anderer Stelle gezeigt werden, daß man auch in diesem Falle funktionentheoretische Methoden, z. B. die Theorie der Theta-Funktionen benutzen kann, um die Momente der Vierpilzplatte übersichtlicher darzustellen.

(Eingegangen am 3. August 1953.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *W. Müller*, München 9, Taubenstraße 2/III.

Schmiermitteldruck und Randverformungen des Rollenlagers*.

Von **J. Dörr.**

1. Aufgabenstellung. Die Frage nach der Lebensdauer von Rollenlagern setzt die Kenntnis der in den Rollen, der Lagerschale und der Welle wirkenden Schub- und Normalspannungen voraus. Zu ihrer Berechnung muß man die an den einzelnen Teilen des Lagers wirkenden Randkräfte kennen. Beim geschmierten Lager berühren sich die Oberflächen der Rollen nicht unmittelbar mit denen der Welle und Schale, wenn die Welle in Rotation ist. Dann zwängt sich nämlich das Schmiermittel zwischen die Oberflächen, so daß zwischen den Rollen und der Welle bzw. Schale Spalte entstehen, die in gewissen Breitenbereichen lückenlos vom Schmiermittel ausgefüllt sind. Die auf die Oberflächen der Lagerteile wirkenden Randkräfte sind dann also identisch mit den Randkräften des Schmiermittels.

Bei ziemlich weitgehend gültigen Voraussetzungen lassen sich die im Schmiermittel wirkenden Spannungen berechnen, wenn man in dem lückenlos vom Schmiermittel ausgefüllten Bereich die Spaltweite als Funktion des Ortes kennt. Nimmt man die Spalträander als unverformbar an, so ist die Spaltweite bekannt, sofern man die Mindestspaltweite vorgibt.

In Wirklichkeit haben aber die Randkräfte Verformungen der Spalträander zur Folge. Das heißt, die Spaltform, aus der sich die Schmiermittelspannungen berechnen lassen, hängt ihrerseits von der Größe und Verteilung der Schmiermittelspannungen ab. Das führt mathematisch dazu, daß die Spaltweite erst auf dem Umweg über eine nicht lineare Integralgleichung bestimmt werden muß. Eine strenge Lösung dieser Integralgleichung dürfte selbst unter den stärksten zulässigen Vereinfachungen aussichtslos sein. Auch der numerischen Behandlung stellen sich noch so erhebliche Schwierigkeiten in den Weg, daß bei einem ersten Lösungsversuch vereinfachende Annahmen geboten erscheinen. Für die folgende Untersuchung werden unter anderem folgende Annahmen gemacht:

a) In den Lagerelementen werden ebene Verformungszustände vorausgesetzt.

b) Die Strömungsvorgänge im Schmiermittelspalt werden als laminar und eben vorausgesetzt.

c) Die Zähigkeit des Schmiermittels wird als unabhängig von Druck und Temperatur angenommen.

Die letzte Annahme ist für die Anwendbarkeit des hier mitgeteilten Verfahrens nicht unbedingt erforderlich, vereinfacht aber die numerischen Rechnungen.

2. Die Berechnung des Schmiermitteldrucks bei vorgegebener Spaltweite. Strömungsvorgänge von Flüssigkeiten gehorchen der *Navier-Stokes*schen Gleichung. Betrachtet man die laminare Strömung eines Schmiermittels in einem engen Spalt, so lassen sich die Trägheitskräfte gegenüber den Zähigkeitskräften vernachlässigen. Wenn wir außerdem noch das Schmiermittel als inkompressibel voraussetzen, also $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$ fordern, reduziert sich die Strömungsgleichung auf die Form

$$\operatorname{grad} q = \eta \, \Delta \mathfrak{v} \, . \tag{1}$$

Hier ist q der Schmiermitteldruck, η der Zähigkeitskoeffizient und $\mathfrak{v}$ die Strömungsgeschwindigkeit.

Auch diese recht einfach erscheinende Beziehung zwischen Druck und Geschwindigkeit bietet der mathematischen Auswertung noch erhebliche Schwierigkeiten. Mit einigen zusätzlichen Annahmen, die beim engen Spalt im allgemeinen erfüllt sind, hat *Reynolds* von (1)

* Die vorliegende Untersuchung wurde mir ermöglicht durch ein für zwei Jahre gewährtes Stipendium der Deutschen Forschungsgemeinschaft. Als sich herausstellte, daß allein mit formal mathematischen Methoden das Problem nicht zu bewältigen war, erlaubte eine großzügige Spende der Deutschen Shell A.-G. die Hinzunahme numerischer Untersuchungen. Die Deutsche Forschungsgemeinschaft gewährte danach für die Zuendeführung der numerischen Rechnungen noch eine Sachbeihilfe. Auch die Pametrada Research Station in Wallsend/Northumberland förderte die Durchführung der umfangreichen numerischen Arbeiten in wirksamer Weise. Für alle dargebotenen Unterstützungen danke ich herzlich. Mein Dank gebührt auch noch den Herrn *G. Niemann*, *W. Peppler*, *G. Vogelpohl* und *A. Cameron*, die mir bei Besprechung technischer und physikalischer Fragen vielfältige Anregungen gaben.

ausgehend eine noch wesentlich einfachere Beziehung hergeleitet. Bei unserem zweidimensionalen Strömungsproblem kommt man aber auch auf sehr bequeme und anschauliche Weise direkt zu der gewünschten Beziehung. Wir betrachten dazu den in Abb. 1 dargestellten Spalt.

Der untere Spaltrand sei eben, der obere Spaltrand habe vom unteren den Abstand $H = H(x)$. Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß $H(0) = H_{min}$ ist. Der Spaltbereich, der lückenlos vom Schmiermittel ausgefüllt ist, sei links durch x_a, rechts durch x_b begrenzt. An der Stelle $x = 0$ habe der untere Spaltrand die substantielle Geschwindigkeit V_2, der obere Spaltrand die substantielle Geschwindigkeit V_1 nach links. Wenn also $V_1 = V_2$ ist, rollt der obere Körper schlupflos nach rechts auf dem unteren ab.

In dem Spaltbereich $x_a \leq x \leq x_b$, der lückenlos vom Schmiermittel ausgefüllt ist, sei

$$\left|\frac{d}{dx} H(x)\right| \ll 1 \quad \text{und} \quad (x_b - x_a) \gg H_{min} . \tag{2a}$$

Dann gilt für $x_a \leq x \leq x_b$ bis auf vernachlässigbar kleine Bereiche

$$\left|\frac{\partial q}{\partial y}\right| \ll \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| ; \qquad \left|\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\right| \ll \left|\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right| . \tag{2b}$$

Dadurch reduziert sich (1) auf die Näherungsbeziehung

$$\frac{dq}{dx} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} . \tag{2c}$$

Für laminare Strömungen im Parallelspalt gilt (2c) streng. Das Geschwindigkeitsfeld läßt sich in diesem Sonderfall ebenfalls streng beschreiben und zwar durch einen quadratischen Ausdruck der Form

$$v_x = a + b\,y + c\,y^2 .$$

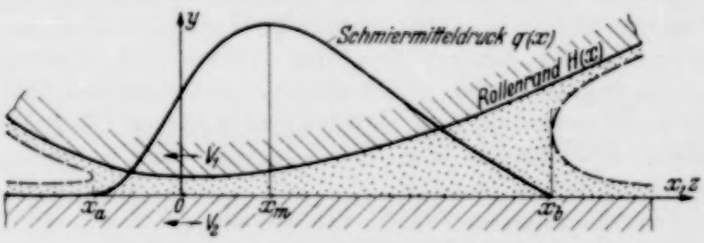

Abb. 1. Geschmierte Rolle auf ebenem Untergrund.

Bei Vorgabe der Durchflußmenge lassen sich mit den Randbedingungen alle drei auftretenden Faktoren a, b, c bestimmen. Da unser Spalt wegen (2a) nur wenig vom Parallelspalt abweicht, wählen wir für die Geschwindigkeitsverteilung den Ansatz

$$v_x = a(x) + y\,b(x) + y^2\,c(x) . \tag{3a}$$

Die Randbedingungen lauten, wenn wir wegen (2a) quadratisch kleine Fehler zulassen,

$$v_x = -V_1 \quad \text{für} \quad y = H(x) , \qquad v_x = -V_2 \quad \text{für} \quad y = 0 . \tag{3b}$$

Beachten wir noch, daß wir Inkompressibilität, also

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 \tag{3c}$$

vorausgesetzt haben, so lassen sich alle drei Funktionen $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ bis auf einen offenen Parameter bestimmen. Dieser Parameter, den wir h_0 nennen, steht in Zusammenhang mit der Durchflußmenge. Das Ergebnis der hier nicht wiedergegebenen elementaren Rechnung lautet

$$v_x = -V_2 + (V_2 - V_1)\frac{y}{H(x)} + 3(V_1 + V_2)\frac{H(x) - h_0}{H^3(x)}\,[H(x) - y]\,y . \tag{3d}$$

Damit nimmt (2c) die Form an

$$\frac{dq}{dx} = 6\,\eta\,(V_1 + V_2)\frac{h_0 - H(x)}{H^3(x)} . \tag{4}$$

Negative Drucke sind im offenen Rollenlager nicht möglich, da der Schmiermittelfilm durch Unterdruck auseinander gerissen wird. Der Bereich des lückenlos vom Schmiermittel ausgefüllten Spaltes wird also durch die Randbedingungen

$$q(x_a) = q(x_b) = 0 \tag{5a}$$

festgelegt. Das ist aber nicht ausreichend zur eindeutigen Festlegung von $q(x)$ bzw. $v_x(x, y)$, da in den in Frage stehenden Beziehungen noch der offene Parameter h_0 auftritt. Druckmessungen an Rollenlagern [1] zeigen, daß an der Hinterkante x_a des Druckbereiches eine Art

[1] Siehe z. B. *W. Peppler*, Druckübertragung an geschmierten zylindrischen Gleitflächen. VDI-Forschungsheft 391 (1938), S. 2 und S. 10.

Abflußbedingung zu beachten ist, die sich mathematisch durch die Forderung

$$\frac{dq}{dx} = 0 \quad \text{für} \quad x = x_a \tag{5b}$$

ausdrückt.

Die Randbedingungen (5a) und (5b) sind erfüllt, wenn man $x_b = + |x_b|$ vorgibt,

$$h_0 = H(x_a) \tag{6a}$$

setzt und den Rand x_a durch die Forderung

$$\int_{x_a}^{x_b} \frac{H(x_a) - H(z)}{H^3(z)}\, dz = 0 \tag{6b}$$

festlegt. Für den Druck findet man dann, wenn η als konstant angenommen wird,

$$q(x) = -6\,\eta (V_1 + V_2) \int_{x}^{x_b} \frac{H(x_a) - H(z)}{H^3(z)}\, dz\,. \tag{6c}$$

Die Lage des Randes x_b wird durch die Stärke der Schmierung, dem sogenannten Spaltfüllungsgrad festgelegt. Je stärker die Schmierung ist, desto größer wird x_b und auch $x_b/|x_a|$.

Beim unverformbaren Rollenlager ist $H(x)$ bestimmt, wenn man H_{min} vorgibt. Dabei besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Mindestspaltweite H_{min} und der Gesamtrollenlast

$$P = \int_{x_a}^{x_b} q(x)\, dx. \tag{6d}$$

Bei sonst gleichen Bedingungen ist [1] P umgekehrt proportional zu H_{min}. Die Berechnung der Druckfunktion stellt beim unverformbaren Lager, weil die Spaltweite $H(x)$ bekannt ist, lediglich eine Integrationsaufgabe dar. Nur die Bestimmung des hinteren Randpunktes $x_a = f(x_b)$ bereitet gewisse Schwierigkeiten. *W. Peppler* [2] hat dieses spezielle Problem in seiner Dissertation unter anderem erschöpfend behandelt.

3. Berechnung der Normalverschiebung eines Rollenrandes bei vorgegebenen Randkräften. Die im Schmiermittel vorhandenen Druck- und Schubspannungen wirken als normale und tangentiale Randkräfte auf die Randflächen des Rollenlagers ein und rufen Normal- und Tangentialverschiebungen der Randflächen hervor. Die Spaltweite wird von den Tangentialverschiebungen der Ränder nur quadratisch wenig geändert. Die Normalverschiebungen werden von den tangentialen Randkräften nur quadratisch beeinflußt. Deshalb brauchen wir nur den Einfluß der normalen Randkräfte auf die normalen Randverschiebungen zu beachten, um die elastische Verformung des Schmiermittelspaltes zu ermitteln. Zu ihrer Berechnung gehen wir von einem vereinfachten System (Abb. 2) aus. Wir nehmen an, der Rollenradius sei klein im Verhältnis zum Radius der Welle, was praktisch in den meisten Fällen zutrifft. Dann darf man die Krümmung der Wellenoberfläche und der Innenfläche der Schale gegenüber der Krümmung der Rollenoberfläche vernachlässigen. Wir betrachten deshalb zur Berechnung der Rollendeformation ein Ersatzsystem, bei dem die Rollen zwischen zwei eben begrenzten Halbräumen liegen. Die Rotation der Welle ahmen wir dadurch nach, daß der obere Halbraum mit der Geschwindigkeit V nach rechts bewegt wird. Dabei entstehen in den Spalten zwischen den Rollen und den Begrenzungsebenen der Halbräume Schmiermitteldrücke. Die auf eine Rolle einwirkenden Randkräfte sind aus Symmetriegründen periodisch mit der Periode π, wenn man der betrachteten Rolle Polarkoordinaten mit dem Rollenmittelpunkt als Ursprung gibt.

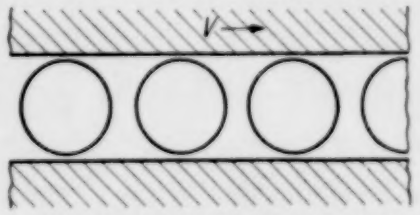

Abb. 2. Zwei durch Rollen getrennte elastische Halbräume.

Die Periodizität der Randkräfte erlaubt die Einführung einer speziellen *Green*schen Funktion für die Radialauslenkung des Rollenrandes, mit deren Hilfe sich die Auslenkung für all-

[1] *W. Peppler*, a. a. O., Formel (17).
[2] A. a. O., Seite 2/4 und 12/13.

gemeine π-periodische Randkräfte berechnen läßt. Als *Greens*che Funktion wählen wir die Radialauslenkung, die der Rollenrand erleidet, wenn zwei zum Mittelpunkt weisende, auf demselben Durchmesser wirkende Einzelkräfte am Rollenrand angreifen.

Die unter dieser Belastung auftretenden Spannungen in der Rolle sind bekannt. Sie lassen sich durch einfache Ausdrücke beschreiben, wenn man sie in Teilspannungen zerlegt, die auf drei verschiedene, in Abb. 3 erläuterte Koordinatensysteme bezogen werden. Diese Teilspannungen sind [1]

$$\sigma_{\varrho'} = \frac{2}{\pi \varrho'} \cos \vartheta' , \qquad \sigma_{\varrho''} = \frac{2}{\pi \varrho''} \cos \vartheta'' , \qquad \bar{\sigma}_r = -\frac{1}{\pi R} , \qquad \bar{\sigma}_\varphi = -\frac{1}{\pi R} . \tag{7}$$

Für unsere Aufgabenstellung müssen wir alle Teilspannungen auf ein gemeinsames Koordinatensystem umrechnen. Wir wählen dazu das System (r, φ). In dem gemeinsamen System können wir entsprechende Komponenten der Teilspannungen addieren zu

$$\sigma_\varphi = \sigma_\varphi(r, \varphi) , \qquad \sigma_r = \sigma_r(r, \varphi) , \qquad \tau_{r,\varphi} = \tau_{r,\varphi}(r, \varphi)$$

mit

$$\sigma_r(R, \varphi) = 0 \quad \text{für} \quad \varphi \neq \begin{matrix} \pi \\ 0 \end{matrix}$$

$$\tau_{r,\varphi}(R, \varphi) = 0 \quad \text{für alle } \varphi\text{-Werte} .$$

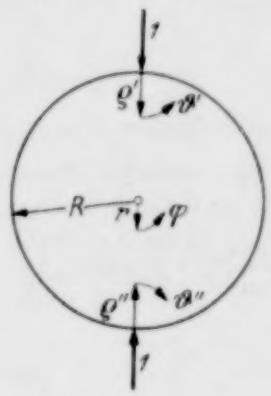

Abb. 3. Koordinatensysteme für eine durch zwei entgegengesetzte Randkräfte belastete Rolle.

Die Ausdrücke sind recht unförmig und werden deshalb nicht angegeben. Aus den Normalspannungen lassen sich die Radialverschiebungen des Rollenrandes durch Integration gewinnen. Man findet

$$G(\varphi) = \frac{1 - \nu^2}{E} \int_0^R \left(\sigma_r - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_\varphi \right) dr .$$

Die Integration, die mühsam, aber streng durchführbar ist, ergibt

$$G(\varphi) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \left[2 \cos \varphi \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| + 2 - \frac{\pi}{2} \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} |\sin \varphi| \right] . \tag{8}$$

Die hiermit gefundene *Greens*che Funktion ist periodisch mit der Periode π, wie es sein muß.

Die von einer Belegung normaler Randkräfte $\Pi(\varphi) = \Pi(\varphi \pm \pi)$ hervorgerufene Radialauslenkung des Rollenrandes ergibt sich zu

$$u_r(\varphi) = \int_{c-\pi}^{c} \Pi(\alpha)\, G(\varphi - \alpha)\, d\alpha . \tag{9}$$

Beim Rollenlager tritt der Schmiermitteldruck nur in zwei sehr kleinen Winkelbereichen

$$\varphi_a \leq \varphi \leq \varphi_b , \qquad \pi + \varphi_a \leq \varphi \leq \pi + \varphi_b \quad \text{mit} \quad \varphi_b - \varphi_a \ll \pi$$

auf, und man braucht bei unseren Untersuchungen auch die Radialverschiebung u_r nur in diesen kleinen Winkelbereichen zu kennen. Deshalb darf man in (8) $\left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| = \left| \frac{\varphi}{2} \right|$ und $\cos \varphi = 1$ setzen und den dritten Summanden in der Klammer ganz vernachlässigen. Wir verwenden also im Folgenden immer die Beziehung

$$u_r(\varphi) = \frac{2(1 - \nu^2)}{\pi E} \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} \Pi(\alpha) \left(\ln \frac{|\varphi - \alpha|}{2} + 1 \right) d\alpha \quad \text{mit} \quad \varphi_a \leq \varphi \leq \varphi_b . \tag{10}$$

Den Spaltbereich $\pi + \varphi_a \leq \varphi \leq \pi + \varphi_b$ brauchen wir wegen der Periodizität nicht zu betrachten.

4. Die Integralgleichungen des geschmierten, elastischen Rollenlagers. Wir bleiben vorerst noch bei dem in Abb. 2 und 1 dargestellten Ersatzsystem, nehmen also weiterhin an, daß der Untergrund eine ebene Grenzfläche hat. Weiterhin wollen wir aber noch annehmen, daß nur die Rolle verformbar, der Untergrund also starr sei. Alle mit diesen Annahmen gefundenen Ergebnisse lassen sich nachträglich sehr einfach auf den Fall umrechnen, daß auch der Untergrund (d. h. die Schale oder Welle) gekrümmt und elastisch ist.

[1] Vgl. *S. Timoshenko*, Theory of Elasticity S. 104, New York und London 1934.

Wir gehen von den Winkelkoordinaten φ und α auf Längenkoordinaten x und z über. Für den schmalen Winkelbereich $\varphi_a \leq \varphi \leq \varphi_b$ bzw. Längenbereich $x_a \leq x \leq x_b$ können wir außerdem das Kreisbogenstück der unverformten Rolle durch einen Parabelbogen ersetzen. So entsteht für die Spaltweite der Ausdruck

$$H(x) = s + \frac{x^2}{2R} - \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{x_a}^{x_b} q(z) \left(\ln \frac{|x-z|}{2R} + 1 \right) dz \,. \tag{11a}$$

Bei der unverformten Rolle, also für Elastizitätsmodul $E \to \infty$ oder $q(z) = 0$ ist $s = H_{min}$. Mit der bereits hergeleiteten Beziehung (6c) und der nicht holonomen Randbedingung

$$\int_{x_a}^{x_b} \frac{H(x_a) - H(z)}{H^3(z)} \, dz = 0 \tag{11b}$$

haben wir somit in (11a), (6c) und (11b) die formelmäßige Beschreibung der gestellten Aufgabe vor uns.

Wir haben also zwei gekoppelte Integralgleichungen, von denen die zweite nichtlinear ist. Durch Einführung von (11a) in (6c) kann man eine einzige nichtlineare Integralgleichung für die Druckfunktion $q(x)$ erhalten. Umgekehrt ergibt die Einführung von (6c) in (11a) eine nicht lineare Integralgleichung für die Spaltweite $H(x)$. Beide so gewonnenen Integralgleichungen sind aber so kompliziert, daß ihre direkte Untersuchung hoffnungslos erscheint. Die Aufspaltung in zwei gekoppelte Integralgleichungen (11a) und (6c) ist also vorzuziehen, insbesondere deshalb, weil diese Darstellung sofort die Möglichkeit eines iterativen Lösungsverfahrens erkennen läßt.

5. Lösung der Integralgleichungen durch Iterationsverfahren. Durch die Formulierung unserer Aufgabenstellung in Form der beiden gekoppelten Integralgleichungen (11a) und (6c) wird sofort folgendes iterative Lösungsverfahren nahe gelegt. Wir geben eine physikalisch sinnvolle Spaltweite $H_0(x)$ vor (zum Beispiel die Spaltweite des unverformten Rollenlagers) und berechnen hierfür nach (6c) unter Beachtung der Randbedingung (11b) die zugeordnete Druckfunktion $q_0(x)$. Mit dieser Druckfunktion berechnen wir nach (11a) eine verbesserte Spaltweite $H_1(x)$, wiederholen das Verfahren, um ein $q_1(x)$ und $H_2(x)$ zu erhalten und fahren in diesem Sinne fort, bis die Funktionen $q_{n-1}(x)$ und $H_n(x)$ sich genügend wenig von den Funktionen der vorhergehenden Iteration unterscheiden. Dabei brauchen wir noch einen Parameter, der die relative Stärke der Verformung beschreibt.

Bei einem ersten numerischen Versuch offenbaren sich drei Schwierigkeiten. Die Werte s und x_a ändern sich stark mit dem Verformungsparameter. Die Erfüllung der Randbedingung (11b) ist lästig. Die Berechnung des Integrals mit dem singulären Integranden in Formel (11a) ist mühevoll und sowohl formelmäßig als auch numerisch sehr zeitraubend, da es in Abhängigkeit von x, das heißt numerisch für viele x-Werte ermittelt werden muß.

Alle diese Schwierigkeiten werden überwunden oder gemildert,

1) indem man eine neue Koordinate ζ durch $x = \lambda \zeta + x_a$ einführt, so daß der Abstand vom Beginn des Druckberges $p(\zeta) \equiv q\big(x(\zeta)\big)$ bis zu seinem Maximum immer den Wert 1 hat und der Beginn des Druckberges an der Stelle $\zeta = 0$ liegt,

2) indem man zuerst $h'(\zeta)$ berechnet und dann daraus streng oder angenähert $h(\zeta)$ ermittelt. Dabei ist $h(\zeta) \equiv H\big(x(\zeta)\big)$,

3) indem man die Druckfunktion $p(\zeta)$ durch Reihen von solchen Elementarfunktionen darstellt, daß die ihnen zugeordneten Integrale zur Ermittlung von $h'(\zeta)$ sich streng berechnen lassen.

Wir wollen nun diese drei Maßnahmen in unserer formelmäßigen Darstellung berücksichtigen und setzen dazu

$$x = \lambda \zeta + x_a, \qquad z = \lambda \xi + x_a, \qquad q(\lambda \zeta + x_a) \equiv p(\zeta); \qquad H(\lambda \zeta + x_a) \equiv h(\zeta) \,. \tag{12a}$$

Dabei soll also λ so gewählt sein, daß

$$p'(0) = p'(1) = 0 \quad \text{ist} \,. \tag{12b}$$

Außerdem führen wir noch die Bezeichnungen ein

$$V_1 + V_2 = V; \qquad \mu = \mu(E, P, V, \eta, \nu) \qquad \text{(Verformungsparameter)}. \tag{12c}$$

Mit diesen Transformationen und Bezeichnungen läßt sich unser Problem wie folgt formulieren:

$$\frac{h'(\zeta)}{h(0)} = B\left[A + 2\,\zeta + \mu\,\frac{K(\zeta)}{K_{max}}\right]. \tag{13a}$$

$$p(\zeta)\,\frac{h^2(0)}{6\,\eta\,V\,\lambda} = \int_0^{\zeta}\left[\frac{h^3(0)}{h^3(\xi)} - \frac{h^2(0)}{h^2(\xi)}\right] d\xi\,. \tag{13b}$$

Die durch das Integral

$$K(\zeta) = \int_0^{\zeta_b} \frac{p(\xi)}{\xi - \zeta}\,d\xi \tag{13c}$$

definierte Funktion bezeichnen wir als Verformungsfunktion. Der Verformungsparameter μ faßt alle Größen zusammen, die auf die relative Spaltverformung Einfluß haben. Wie sich $\mu = \mu\,(E, P, V, \eta, \nu)$ aus den Betriebsdaten des Rollenlagers ermitteln läßt, wird später erläutert.

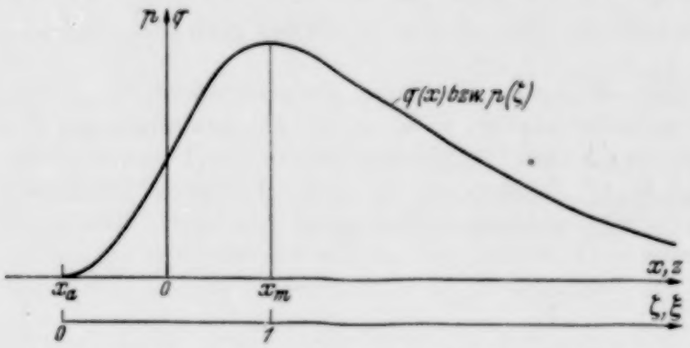

Abb. 4. Druckkurve über wirklicher und bezogener Längenkoordinate.

Außer dem Parameter μ treten in (13a) noch die beiden neuen Parameter A und B auf. Diese lassen sich bei vorgegebenem μ-Wert und vorgegebenem ζ_b-Wert aus den Bedingungen

$$p'(0) = p'(1) = 0 \quad \text{und} \quad p(\zeta_b) = 0$$

festlegen. Das bedeutet, daß man A und B aus den Bedingungen

$$h(0) = h(1) \quad \text{und} \quad p(\zeta_b) = 0 \tag{13d}$$

bestimmen kann (wobei vorausgesetzt wird, daß $h\,(\zeta)$ stetig ist). Über das „Streckungsmaß" λ braucht man sich erst Gedanken zu machen, wenn die numerischen Ergebnisse technisch ausgewertet werden.

Die erste der beiden Bedingungen (13d) erlaubt die unmittelbare Berechnung von A, wenn der Verformungsparameter μ und die Verformungsfunktion $K\,(\zeta)$ vorgegeben sind, wie es bei dem Iterationsverfahren der Fall ist. Es ergibt sich

$$A = -1 - \frac{\mu}{K_{max}} \int_0^1 K\,(\zeta)\,d\zeta\,. \tag{14a}$$

Die zweite Bedingung $p(\zeta_b) = 0$, die zur Festlegung des Parameters B führt, läßt sich nicht unmittelbar, sondern nur durch Probieren bestimmen. Nachdem man A durch (14a) berechnet hat, wird aus (13a) mit einem geschätzten B-Wert

$$\frac{h\,(\zeta)}{h\,(0)} = 1 + B \int_0^{\zeta}\left[A + 2\,\xi + \frac{\mu}{K_{max}}\,K\,(\xi)\right] d\xi \tag{14b}$$

und damit das Integral (13b) für den vorgegebenen Randwert $\zeta = \zeta_b$ berechnet. Ergibt sich

$$\int_0^{\zeta_b}\left[\frac{h^3(0)}{h^3(\zeta)} - \frac{h^2(0)}{h^2(\zeta)}\right] d\zeta = 0\,, \tag{14c}$$

so haben wir den richtigen B-Wert.

Mit dem so gewonnenen A- und B-Wert kennt man nach (14b) die „bezogene Spaltweite" $h\,(\zeta)/h\,(0)$ und kann damit nach (13b) die „bezogene Druckfunktion"

$$p(\zeta)\,\frac{h^2(0)}{6\,\eta\,V\,\lambda} \tag{15a}$$

berechnen. Durch Normierung gewinnt man daraus

$$\bar{p}\,(\zeta) = p_0(\zeta) + \Delta p(\zeta)\,, \tag{15b}$$

mit $$\bar{p}(1) = p_0(1) = 1 \quad \text{und} \quad \bar{p}'(1) = p_0'(1) = 0\,.$$

Dabei ist $p_0(\zeta)$ die normierte Druckfunktion der nicht verformten Rolle. Wir bezeichnen $\Delta p(\zeta)$ als Druckdifferenz.

Die der normierten Druckfunktion (15b) zugeordnete Verformungsfunktion bezeichnen wir mit

$$\bar{K}(\zeta) = \int_0^{\zeta_b} \frac{\bar{p}(\xi)}{\xi - \zeta}\, d\xi = K_0(\zeta) + \Delta K(\zeta)\,. \tag{15c}$$

Wie sich dieses unangenehme Integral numerisch berechnen läßt, wird später beschrieben. Wenn $\bar{K}(\zeta)$ in erster Näherung bekannt ist, wird das Verfahren in der angegebenen Weise wiederholt, um $h(\zeta)/h(0)$, $\bar{p}(\zeta)$ und $\bar{K}(\zeta)$ zu verbessern. Wie die Funktionen $h(\zeta)$, $p(\zeta)$, $K(\zeta)$, das heißt die Werte $h(0)$, μ, λ aus den Betriebsdaten der Rolle berechnet werden, wird ebenfalls später angegeben.

6. Numerische Durchführung des Iterationsverfahrens für das stark geschmierte Rollenlager. Wir beschränken uns hier auf den wichtigsten Sonderfall, nämlich den des stark geschmierten Rollenlagers. Bei starker Schmierung und den technisch üblichen Rollenlasten ist das Verhältnis $x_b/|x_a|$ und somit auch der Wert ζ_b sehr groß. Dadurch ist es erlaubt, in den Beziehungen (13) und (14) den Fall starker Schmierung durch den mathematischen Grenzfall $\zeta_b \to \infty$ darzustellen [1]. Nur dieser Grenzfall wird von jetzt ab behandelt. Dieser Grenzfall ist noch aus einem anderen Grund wichtig. Der Einfluß des Spaltfüllungsgrades ist nämlich in weiten Grenzen sehr gering, wenn man von extrem kleinen Spaltfüllungsgraden absieht. Das hat insbesondere *W. Peppler* durch Rechnungen beim unverformbaren Rollenlager gezeigt (Seite 13 der genannten Veröffentlichung). Das bedeutet bei uns, daß der für $\zeta_b \to \infty$ berechnete Druckverlauf auch für endliche ζ_b-Werte ($\zeta_b \gg 1$) eine gute Näherung darstellt.

Mit den Ergebnissen von *Peppler* findet man für diesen Grenzfall als normierte Druckfunktion (bei 5-stelliger Genauigkeit)

$$p_0(\zeta) = \frac{1}{\pi}\left[7{,}59566\,\frac{u}{(1+u^2)^2} - \frac{u}{1+u^2} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\, u\right] \tag{16}$$

mit

$$u = 0{,}95026\,(\zeta - 0{,}5)\,.$$

Die zugeordnete Verformungsfunktion $K_0(\zeta)$ läßt sich nicht formelmäßig streng berechnen, wohl aber ihre erste Ableitung $K_0'(\zeta)$, aus der sich durch numerische Integration $K_0(\zeta)$ selbst berechnen läßt. Man kann auch direkt $K_0(\zeta)$ durch Reihenentwicklungen berechnen, die im gesamten Bereich $0 \leq \zeta \leq \infty$ konvergieren. Davon wird im folgenden Abschnitt die Rede sein.

Über den Variabilitätsbereich des Verformungsparameters μ läßt sich unmittelbar eine allgemeine Aussage machen. Bei unverformbarer Rolle ist $\mu = 0$. Die stärkste relative Verformung tritt im *Hertz*schen Grenzfall auf. Dann berührt die Rolle den starren Untergrund auf einem ebenen Flächenstreifen. Die normale Randverschiebung ist demnach über dem Berührstreifen eine Parabel, die Verformungsfunktion $K(\zeta)$ also eine durch den Punkt $\zeta = 1$ hindurchlaufende Gerade negativer Steigung. Da im *Hertz*schen Grenzfall außerdem $h(\zeta)/h(0) \to 1$ geht, folgt aus (14b), daß $\mu \to 2$ geben muß. Es gilt also

$$0 \leq \mu \leq 2\,. \tag{17}$$

Das Iterationsverfahren beginnt naturgemäß mit einem relativ kleinen μ-Wert, z. B. $\mu = 0{,}5$. Die numerische Berechnung von A auf Grund von (14a) ist problemlos. Bei uns wurde dazu $K(\zeta)$ in den Punkten $\zeta = 0\,(0{,}05)\,1$ berechnet und dann nach *Simpson* integriert.

Bei der Ermittlung von B nach (14c) ist es lästig, daß ein von 0 bis ∞ gehender Integrationsweg vorliegt (wegen $\zeta_b = \infty$). Die Funktionen $K(\zeta)$ und $h(\zeta)/h(0)$ wurden numerisch nur für die Punkte

$$\zeta = 0\,(0{,}05)\,1\,(0{,}1)\,2{,}5\,(0{,}5)\,4\;\;5\;\;6 \tag{18}$$

berechnet, so daß nur in dem Bereich $0 \leq \zeta \leq 6$ nach *Simpson* integriert werden konnte, während für den Außenbereich $\zeta > 6$ eine genügend genaue Abschätzung vorgenommen werden mußte. Dabei wurde folgender Weg gewählt.

[1] *W. Peppler*, a. a. O., S. 3, 12, 13.

Die Verformungsfunktion hat das asymptotische Verhalten $K(\zeta) = \mathbf{0}(\xi^{-1})$, wie aus (13c) folgt. Die Spaltweite hat deshalb nach (14b) das asymptotische Verhalten $h(\zeta) = \mathbf{0}(\zeta^2)$. Der Integrand von (14c), den wir hier vorübergehend mit $f(\zeta)$ bezeichnen wollen, hat demnach das asymptotische Verhalten $f(\zeta) = \mathbf{0}(\zeta^{-4})$. Wir setzten deshalb

$$f(\zeta) \approx \frac{a_4}{\zeta^4} + \frac{a_5}{\zeta^5} + \frac{a_6}{\zeta^6} + \frac{a_7}{\zeta^7} \tag{19a}$$

und bestimmten die 4 Koeffizienten durch die Forderung, daß die abbrechende Reihe die bekannten Funktionswerte $f(\zeta_\nu)$ an den Stellen $\zeta_\nu = 3, 4, 5, 6$ annimmt. Setzt man $f(\zeta_\nu)\,\zeta_\nu^3 = g(\zeta_\nu)$ und $g(\zeta_\nu) = g_\nu$, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} f(\zeta) \approx &\left(-\frac{1}{6}g_3 + \frac{1}{2}g_4 - \frac{1}{2}g_5 + \frac{1}{6}g_6\right)\frac{1}{\zeta^4} + \left(\frac{5}{2}g_3 - 7g_4 + \frac{13}{2}g_5 - 2g_6\right)\frac{1}{\zeta^5} \\ &+ \left(-\frac{37}{3}g_3 + \frac{63}{2}g_4 - 27g_5 + \frac{47}{6}g_6\right)\frac{1}{\zeta^6} + (20g_3 - 45g_4 + 36g_5 - 10g_6)\frac{1}{\zeta^7}. \end{aligned}\right\} \tag{19b}$$

Die Güte dieser Darstellung läßt sich kontrollieren, indem man die Reihe auch für die Punkte $\zeta = 2{,}5$ und $\zeta = 3{,}5$ berechnet und mit den unmittelbar gegebenen Werten des Integranden vergleicht. Es ergab sich dabei ein relativer Fehler von höchstens 0,005, der als sehr klein zu bezeichnen ist.

Im Bereich $\zeta \geq 6$ wurde der Integrand von (14c) durch die Darstellung (19b) ersetzt, streng integriert und zu dem mit der Simpsonregel für den Bereich $0 \leq \zeta \leq 6$ ermittelten Integrationsbeitrag hinzuaddiert. Nach 3 bis 4 Versuchen mit geeigneter Interpolation wurden so für die verschiedenen μ-Werte die richtigen B-Werte gefunden.

Für $\mu = 0$ ergibt sich auf Grund der *Pepplers*chen Rechnungen $B_0 = 0{,}73669$, so daß man einen Anhalt für die Größenordnung von $B = B(\mu)$ bei kleinen μ-Werten hat.

Mit der Bestimmung von $B(\mu)$ hat man auch fast alle Arbeit zur Berechnung der bezogenen Druckfunktion (15a) geleistet, aus der sich durch Normierung $\bar{p}(\zeta) = p_0(\zeta) + \Delta p(\zeta)$ ergibt.

Geht man mit nicht zu großem Verformungsparameter (etwa $0 < \mu \leq 1$) bei der ersten Iteration von der Verformungsfunktion $K_0(\zeta)$ aus, so erhält man als erste Näherung für die Druckdifferenz $\Delta p(\zeta)$ eine Funktion, die, abgesehen von einem konstanten Faktor, recht gut durch die analytische Funktion

$$p_1(\zeta) = \frac{\zeta^2(1-\zeta)^2}{[1 + (\zeta - 0{,}5)^2]^4} \tag{20a}$$

angenähert wird. Diese Tatsache ist deshalb bedeutungsvoll, weil sich die zugeordnete Verformungsfunktion $K_1(\zeta)$ mit tragbarem Arbeitsaufwand streng berechnen und vertafeln läßt. Auf Grund dieser Tatsache wurden fünf weitere Funktionen ähnlicher Art eingeführt und zwar

$$p_2(\zeta) = \frac{\zeta^2(1-\zeta)^3}{[1 + (\zeta - 0{,}5)^2]^4}, \tag{20b}$$

$$p_3(\zeta) = \frac{\zeta^2(1-\zeta)^2}{[\ldots]^5}, \qquad p_4(\zeta) = \frac{\zeta^2(1-\zeta)^3}{[\ldots]^5}, \tag{20c}$$

$$p_4(\zeta) = \frac{\zeta^2(1-\zeta)^2}{[\ldots]^6}, \qquad p_6(\zeta) = \frac{\zeta^2(1-\zeta)^3}{[\ldots]^6}. \tag{20d}$$

Ihre zugeordneten Verformungsfunktionen

$$K_\nu(\zeta) = \int_0^\infty \frac{p_\nu(\xi)}{\xi - \zeta}\, d\zeta \tag{20e}$$

lassen sich leicht aus $K_1(\zeta)$ herleiten.

Die Funktionen $p_\nu(\zeta)$ und $K_\nu(\zeta)$ wurden für die ζ-Werte (18) 5-stellig vertafelt. Das erlaubt eine wesentliche Vereinfachung und Beschleunigung des Iterationsverfahrens in folgender Weise.

Die durch Iteration gefundene Druckdifferenz wird durch die „elementaren Druckfunktionen“ angenähert

$$\Delta p(\zeta) \approx \sum_{\nu=1}^{6} a_\nu\, p_\nu(\zeta). \tag{21a}$$

Wenn die 6 Koeffizienten a_ν bekannt sind, hat man sofort die zugeordnete Verformungsfunktion

$$\Delta K(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{6} a_\nu \, K_\nu(\zeta) \tag{21b}$$

und kann mit

$$\bar{K}(\zeta) = K_0(\zeta) + \sum_{\nu=1}^{6} a_\nu \, K_\nu(\zeta) \tag{21c}$$

die neue Iterationsrechnung beginnen.

Die durch die abbrechende Reihe (21a) erzielbare Genauigkeit der Annäherung von $\Delta p(\zeta)$ ist natürlich begrenzt. Eine weitere Wiederholung des Iterationsverfahrens wird sinnlos, wenn der Fehler in $\Delta p(\zeta)$ bereits so klein geworden ist, daß er durch die Reihe (21a) nicht mehr vermindert werden kann. Die numerische Rechnung zeigt, daß für $0 \leq \mu \leq 1{,}6$ mit diesem Verfahren nach 3 bis 4 Iterationsschritten ein Ergebnis erzielt wird, das allen praktisch erforderlichen Genauigkeitsansprüchen genügt. Für $1{,}6 < \mu \leq 2$ wären wesentlich mehr elementare Druckfunktionen nötig gewesen. Der dazu erforderliche Arbeitsaufwand zur Berechnung und Vertafelung der zusätzlichen Funktionen $p_\nu(\zeta)$ und $K_\nu(\zeta)$ erschien zu groß, so daß ein neues Verfahren gesucht und gefunden wurde, welches jede beliebige Genauigkeit zu erreichen gestattet.

7. Die numerische Berechnung der Verformungsfunktion $\bar{K}(\zeta)$. Zunächst wird kurz angegeben, wie die Integrale $K_0(\zeta), \ldots, K_6(\zeta)$ berechnet wurden. Wegen

$$p_0(0) = 0 \quad \text{und} \quad p_0(\infty) = 0$$

erhält man durch partielle Integration und anschließende Differentiation

$$\frac{d}{du} K_0(\zeta) = \int_0^\infty \frac{1}{\xi - \zeta} \frac{d}{dv} p_0(\xi) \, d\xi = \int_0^\infty \frac{1}{\xi - \zeta} \left[\frac{9{,}67109}{(1+v^2)^3} - \frac{7{,}88994}{(1+v^2)^2} \right] d\xi \,. \tag{22}$$

Mit den Abkürzungen

$$H_n(u, a) = \int_{-a}^{+\infty} \frac{1}{(v-u)(1+v^2)^n} \, dv \,. \tag{23a}$$

$$a = 0{,}5 \cdot 0{,}95026 = 0{,}47513 \,, \qquad u = 2\,a(\zeta - 0{,}5) \,, \qquad v = 2\,a(\xi - 0{,}5) \tag{23b}$$

gilt also

$$\frac{d}{du} K_0(\zeta) = 9{,}67109 \, H_3(u, a) - 7{,}88994 \, H_2(u, a) \,. \tag{23c}$$

Mit der Rekursionsformel

$$H_{n+1}(u, a) = \frac{1}{1+u^2} H_n(u, a) - \frac{1}{1+u^2} \int_{-a}^{\infty} \frac{u+v}{(1+v^2)^{n+1}} \, dv \tag{24a}$$

lassen sich mühelos alle H_m mit $m = 2, 3, 4, \ldots$ berechnen aus der Grundbeziehung

$$H_1(u, a) = -\frac{u}{1+u^2} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg}\, a \right) + \frac{1}{1+u^2} \ln \frac{\sqrt{1+a^2}}{|a+u|} \,. \tag{24b}$$

Gebraucht wird nun noch der Wert von K_0 an der Stelle $\zeta = 0{,}5$. Man findet mit der Beziehung (16)

$$\left.\begin{aligned} K_0(0{,}5) &= \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{\infty} \left[\frac{7{,}59566}{(1+v^2)^2} - \frac{1}{1+v^2} + \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\, v}{v} \right] dv \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{7{,}59566}{2} \left(\frac{a}{1+a^2} + \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg}\, a \right) - \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\, a - \frac{\pi}{2} \ln |a| - a + \frac{a^3}{3^2} - \frac{a^5}{5^2} + \ldots \right], \end{aligned}\right\} \tag{25a}$$

$$K_0(0{,}5) = 2{,}48687 \,.$$

Damit erhält man schließlich

$$K_0(\zeta) = K_0(0{,}5) + \int_0^u \frac{d}{dv} K_0(\xi) \, dv \,. \tag{25b}$$

wobei u und v durch (23b) erklärt sind und der Integrand durch (23c), (24a), (24b) numerisch berechnet werden kann. Mit Hilfe numerischer Integration (z. B. Simpsonregel) läßt sich mit (25b) die Funktion $K_0(\zeta)$ beliebig genau berechnen. Später wird noch ein Verfahren zur direkten Berechnung von $K_0(\zeta)$ angegeben, das uns als Kontrolle diente.

Mit Hilfe der Beziehungen (24a) und (24b) können wir auch unmittelbar die Funktionen $K_1(\zeta)$ bis $K_6(\zeta)$ berechnen. Durch eine elementare Zerlegung von $p_1(\zeta)$ erhält man

$$K_1(\zeta) = \int_{-0{,}5}^{\infty} \frac{1}{x-z}\left[\frac{1}{(1+x^2)^2} - \frac{5}{2(1+x^2)^3} + \frac{25}{16(1+x^2)^4}\right] dx \tag{26a}$$

mit den Abkürzungen

$$x = \xi - 0{,}5\,, \qquad z = \zeta - 0{,}5\,. \tag{26b}$$

Verwenden wir wieder die durch (23a), (24a), (24b) erklärten Funktionen, so ergibt sich

$$K_1(\zeta) = H_2(z, 0{,}5) - \frac{5}{2} H_3(z, 0{,}5) + \frac{25}{16} H_4(z, 0{,}5)\,. \tag{26c}$$

Alle übrigen drei Funktionen kann man auf $K_1(\zeta)$ zurückführen:

$$K_2(\zeta) = (1-\zeta)\, K_1(\zeta) - \int_0^{\infty} p_1(\xi)\, d\xi = (1-\zeta)\, K_1(\zeta) - 0{,}0944573\,, \tag{26d}$$

$$\left.\begin{aligned} K_3(\zeta) &= \frac{1}{1+(\zeta-0{,}5)^2}\left[K_1(\zeta) - \int_0^{\infty} (\zeta+\xi-1)\, p_3(\xi)\, d\xi\right] \\ &= \frac{1}{1+(\zeta-0{,}5)^2}\left[K_1(\zeta) - \frac{12}{450} - 0{,}0472596\,(\zeta-0{,}5)\right], \end{aligned}\right\} \tag{26e}$$

$$K_4(\zeta) = (1-\zeta)\, K_3(\zeta) - \int_0^{\infty} p_3(\xi)\, d\xi = (1-\zeta)\, K_3(\zeta) - 0{,}0472596\,. \tag{26f}$$

Mit entsprechenden Überlegungen findet man

$$K_5(\zeta) = \frac{1}{1+(\zeta-0{,}5)^2}\left[K_3(\zeta) - 0{,}0349870\,\zeta + 0{,}0089602\right], \tag{26g}$$

$$K_6(\zeta) = (1-\zeta)\, K_5(\zeta) - 0{,}0349870\,. \tag{26h}$$

Da bei diesem Rekursionsprozeß zweifellos an Genauigkeit eingebüßt wird, wurde die numerische Rechnung mit einer für unser Näherungsverfahren reichlich hohen Stellenzahl, nämlich mit 5 geltenden Ziffern begonnen.

Weil mit der Reihe (21a), wie schon erwähnt, nur im Bereich $0 \leq \mu \leq 1{,}6$ ausreichende Genauigkeit erzielt wurde und auch Hinzunahme weiterer Reihenglieder ähnlicher Art diesen Mangel nicht ausreichend behob, mußte im Bereich $1{,}6 < \mu \leq 2$ ein anderes Verfahren angewandt werden. Es erfordert zwar einen größeren Arbeitsaufwand, läßt aber durch Erhöhung der Anzahl der Reihenglieder jede gewünschte Genauigkeit zu.

Wir betrachten das Integral

$$K(\zeta) = \int_0^{\infty} \frac{p(\xi)}{\xi - \zeta}\, d\xi\,. \tag{27a}$$

Hier gilt entsprechend unseren Abmachungen und Voraussetzungen

$$\left.\begin{aligned} p(\xi) &= \mathbf{0}(\xi^{-3}) \quad \text{für} \quad \xi \to \infty\,, \\ p(\xi) &= \mathbf{0}(\xi^{2}) \quad \text{für} \quad \xi \to 0\,. \end{aligned}\right| \tag{27b}$$

Mit der Transformation

$$\zeta = \frac{2}{1+\cos\alpha} - 1\,, \qquad \xi = \frac{2}{1+\cos\beta} - 1 \tag{28a}$$

und der Bezeichnung

$$P(\beta) \equiv p\big(\xi(\beta)\big) \tag{28b}$$

nimmt (27a) die Form an

$$K(\zeta) = -(1+\cos\alpha) \int_0^{\pi} \frac{P(\beta)\sin\beta}{(1+\cos\beta)(\cos\beta - \cos\alpha)}\, d\beta\,. \tag{28c}$$

Das hier auftretende Integral hat, als *Cauchy*scher Hauptwert verstanden, einen Sinn für beliebige Werte $0 \leq \alpha \leq \pi$, da $P(\beta)$ als stetig und glatt vorausgesetzt ist und für $\beta \to 0$ und $\beta \to \pi$ wegen (27b) genügend stark gegen Null strebt.

Das Integral in (28c) läßt sich mit einer aus der Tragflügeltheorie bekannten Formel

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\beta}{\cos\beta - \cos\alpha}\, d\beta = \pi \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha} \qquad \text{für} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

und der daraus folgenden Beziehung

$$\int_0^\pi \frac{\sin n\beta \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha}\, d\beta = -\pi \cos n\alpha \qquad \text{für} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

leicht berechnen, wenn man die Fourierdarstellung wählt

$$\frac{P(\beta)}{1 + \cos\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\beta\,. \tag{28d}$$

Dann erhält man nämlich unmittelbar das gesuchte Integral in der Form

$$K(\zeta) = \pi(1 + \cos\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\alpha\,. \tag{28e}$$

Praktisch wird man so vorgehen, daß man $K_0(\zeta)$ für sich berechnet, damit man nach jedem Iterationsschritt nur noch die Druckdifferenz $\Delta p(\zeta)$ mit dem zugeordneten Integral $\Delta K(\zeta)$ zu berechnen braucht.

Die numerische Rechnung zeigt, daß man zur genügend genauen Darstellung von $\Delta K(\zeta)$ leider sehr viel Reihenglieder benötigt und zwar wenigstens 23 für $\mu \leq 1{,}7$. Darin besteht der Nachteil dieses Verfahrens gegenüber dem vorher besprochenen, bei dem man für $0 \leq \mu \leq 1{,}6$ mit 4 bis 6 Reihengliedern auskam. Der Vorteil des neuen Verfahrens ist der, daß die Erhöhung der Anzahl der Reihenglieder keine prinzipiellen Schwierigkeiten macht. Außerdem kann man die umfangreichen Erfahrungen über Fourierreihen ausnutzen.

Mit der nach (28) bestimmten K-Funktion wurde der Fall $\mu = 1{,}7$ behandelt. Der Fall $\mu = 1{,}8$ wurde ohne Erfolg in Angriff genommen, denn das Iterationsverfahren führte trotz zahlreicher Versuche nicht zur Konvergenz. Die Ursache dafür liegt nicht in der Berechnung von $K(\zeta)$, sondern in der Tatsache, daß bei so starken relativen Verformungen sich die Spaltweite als kleine Differenz großer Zahlen ergibt. Für $\mu \to 2$ treten außerdem an den Stellen $\zeta = 0$ und $\zeta = 2$ Ecken in der Funktion $K(\zeta)$ auf, was die Schwierigkeiten noch erhöht. Leider sind nun aber μ-Werte nahe unterhalb 2, das heißt Verformungszustände in der Nähe des *Hertz*schen Grenzfalles, für den Maschinenbau besonders interessant. Deshalb soll später versucht werden, wenigstens noch den Fall $\mu = 1{,}8$ numerisch zu bewältigen. Der dazu erforderliche Arbeitsaufwand dürfte beträchtlich sein.

8. Die numerischen Ergebnisse des Iterationsverfahrens. Tabelle 1 gibt die numerischen Werte der elementaren Druckfunktionen $p_\nu(\zeta)$ wieder, von denen einige in Abb. 5, 6, 7 graphisch dargestellt sind. Tabelle 2 enthält die elementaren Verformungsfunktionen $K_\nu(\zeta)$, von denen einige in den Abb. 8, 9, 10 graphisch dargestellt sind. Mit Hilfe dieser Elementarfunktionen wurden die Rechnungen für die Verformungsparameter $\mu = 0{,}5$ 1,0 1,25 1,5 1,6 durchgeführt. Bei all diesen Parameterwerten wird bereits nach dem dritten Iterationsschritt Konvergenz im Rahmen der für technische Probleme erforderlichen Genauigkeit erzielt. Abb. 11 zeigt für $\mu = 1{,}6$ die nach dem zweiten und dritten Iterationsschritt erhaltene Druckdifferenz $\Delta p(\zeta)$, um die Güte der Genauigkeit des Endergebnisses zu zeigen. Abb. 12 zeigt die durch die zweite Iteration ermittelte Δp-Kurve und ihre durch $\sum a_\nu p_\nu(\zeta)$ angenäherte Ersatzfunktion für die dritte Iterationsrechnung. Der Vergleich beider Kurven gibt ebenfalls einen Eindruck von der Größenordnung der erzielbaren Genauigkeit.

Bei der ersten Iteration wurde als Grundlage die Druckdifferenz des nächstbenachbarten μ-Wertes gewählt, für den das Iterationsverfahren bereits vollständig durchgeführt war. Außerdem wurde bei den ersten Iterationen zur Berechnung der Verformungsfunktion $\Delta K(\zeta)$ nach (21b) die Druckdifferenz $\Delta p(\zeta)$ nur durch die ersten 3 bis 4 Elementarfunktionen $p_\nu(\zeta)$ angenähert. Lediglich bei der letzten Iteration wurden — falls nötig — alle 6 Elementar-

Tabelle 1. *Elementare Druckfunktionen* $p_\nu(\zeta)$ *für* $\nu = 0 \cdots 6$.

ζ	$p_0(\zeta)$	$p_1(\zeta)$	$p_2(\zeta)$	$p_3(\zeta)$	$p_4(\zeta)$	$p_5(\zeta)$	$p_6(\zeta)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,019 73	0,004 474	0,004 026	0,003 857	0,003 471	0,003 325	0,002 992
0,2	0,082 80	0,018 136	0,014 509	0,016 639	0,013 311	0,015 265	0,012 212
0,3	0,190 15	0,037 697	0,026 388	0,036 247	0,025 372	0,034 853	0,024 396
0,4	0,334 48	0,055 352	0,033 212	0,054 804	0,032 882	0,054 261	0,032 556
0,5	0,500 00	0,062 500	0,031 250	0,062 500	0,031 250	0,062 500	0,031 250
0,6	0,665 53	0,055 352	0,022 141	0,054 804	0,021 922	0,054 261	0,021 705
0,7	0,809 86	0,037 697	0,011 309	0,036 247	0,010 874	0,034 853	0,010 456
0,8	0,917 21	0,018 136	0,003 627	0,016 639	0,003 328	0,015 265	0,003 053
0,9	0,980 28	0,004 474	0,000 447	0,003857	0,000 386	0,003 325	0,000 333
1,0	1,000 00	0	0	0	0	0	0
1,1	0,983 19	0,003 537	—0,000 354	0,002 601	—0,000 260	0,001 912	—0,000 191
1,2	0,939 30	0,011 686	—0,002 337	0,007 843	—0,001 569	0,005 264	—0,001 053
1,3	0,877 94	0,021 026	—0,006 308	0,012 821	—0,003 846	0,007 818	—0,002 345
1,4	0,807 30	0,029 219	—0,011 688	0,016 143	—0,006 457	0,008 919	—0,003 567
1,5	0,733 59	0,035 156	—0,017 578	0,017 578	—0,008 789	0,008 789	—0,004 395
1,6	0,661 08	0,038 634	—0,023 181	0,017 481	—0,010 489	0,007 910	—0,004 746
1,7	0,592 40	0,039 952	—0,027 966	0,016 374	—0,011 462	0,006 711	—0,004 698
1,8	0,529 02	0,039 602	—0,031 682	0,014 722	—0,011 778	0,005 473	—0,004 378
1,9	0,471 54	0,038 091	—0,034 282	0,012 869	—0,011 582	0,004 348	—0,003 913
2,0	0,420 02	0,035 853	—0,035 853	0,011 032	—0,011 032	0,003 394	—0,003 394
2,2	0,333 74	0,030 438	—0,036 525	0,007 825	—0,009 390	0,002 012	—0,002 414
2,5	0,239 01	0,022 500	—0,033 750	0,004 500	—0,006 750	0,000 900	—0,001 350
3,0	0,143 13	0,013 030	—0,026 060	0,001 797	—0,003 594	0,000 248	—0,000 496
3,5	0,090 68	0,007 656	—0,019 141	0,000 766	—0,001 914	0,000 077	—0,000 191
4,0	0,060 47	0,004 672	—0,014 016	0,000 353	—0,001 058	0,000 027	—0,000 080
5,0	0,030 34	0,001 962	—0,007 847	0,000 092	—0,000 369	0,000 004	—0,000 017
6,0	0,016 23	0,000 944	—0,004 719	0,000 030	—0,000 151	0,000 001	—0,000 005

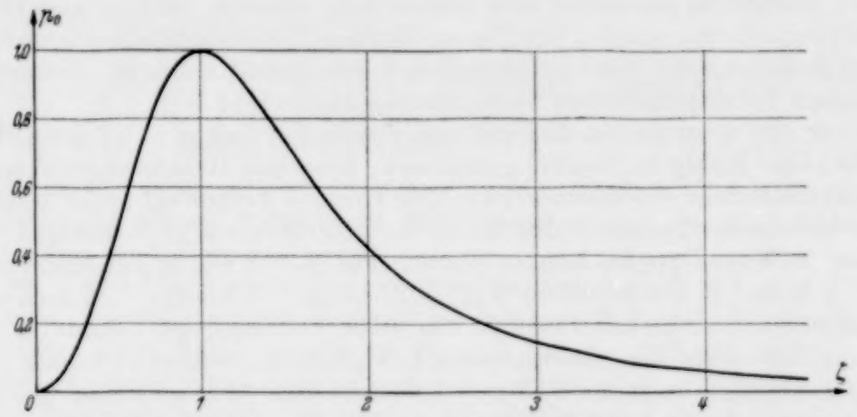

Abb. 5. Elementare Druckfunktion $p_0(\zeta)$ = normierte Druckfunktion des unverformten Rollenlagers.

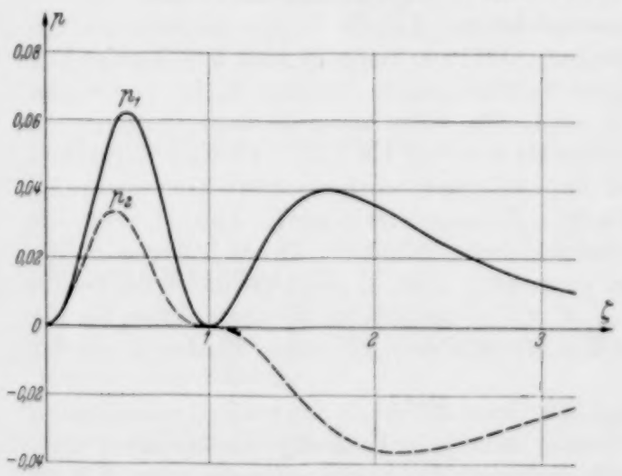

Abb. 6. Elementare Druckfunktionen

$$p_1(\zeta) = \frac{\zeta^3(1-\zeta)^3}{[1+(\zeta-0{,}5)^2]^4} \qquad p_2(\zeta) = (1-\zeta)\,p_1(\zeta)\,.$$

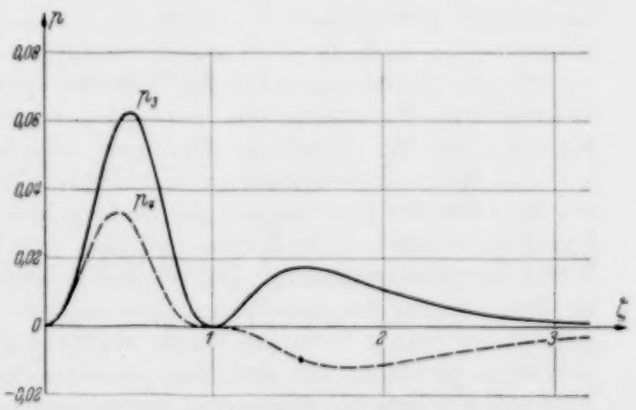

Abb. 7. Elementare Druckfunktionen

$$p_3(\zeta) = \frac{\zeta^3(1-\zeta)^3}{[1+(\zeta-0{,}5)^2]^5} \qquad p_4(\zeta) = (1-\zeta)\,p_3(\zeta)\,.$$

Tabelle 2. *Verformungsfunktionen* $K_\nu(\zeta)$ *für* $\nu = 0 \cdots 6$.

ζ	$K_0(\zeta)$	$K_1(\zeta)$	$K_2(\zeta)$	$K_3(\zeta)$	$K_4(\zeta)$	$K_5(\zeta)$	$K_6(\zeta)$
0	1,497 09	0,100 69	0,006 23	0,078 12	0,030 86	0,069 66	0,034 67
0,05	1,623 92	0,116 04	0,015 78	0,092 01	0,040 15	0,082 51	0,043 40
0,1	1,768 54	0,133 01	0,025 25	0,107 97	0,049 91	0,097 78	0,053 02
0,15	1,919 59	0,148 18	0,031 50	0,122 99	0,057 28	0,112 87	0,060 95
0,2	2,068 51	0,158 54	0,032 38	0,133 99	0,059 93	0,124 72	0,064 79
0,25	2,206 97	0,161 46	0,026 64	0,137 98	0,056 23	0,130 06	0,062 56
0,3	2,326 89	0,155 02	0,014 06	0,132 50	0,045 49	0,125 92	0,053 16
0,35	2,420 72	0,138 47	—0,004 45	0,116 28	0,028 32	0,110 50	0,036 84
0,4	2,481 81	0,112 47	—0,026 98	0,089 63	0,006 52	0,083 76	0,015 27
0,45	2,504 99	0,079 18	—0,050 94	0,054 74	—0,017 16	0,047 84	—0,008 68
0,5	2,486 87	0,041 96	—0,073 48	0,015 30	—0,039 61	0,006 77	—0,031 60
0,55	2,426 14	0,004 90	—0,092 25	—0,024 07	—0,058 09	—0,034 26	—0,050 40
0,6	2,323 70	—0,027 95	—0,105 64	—0,058 75	—0,070 76	—0,070 98	—0,063 02
0,65	2,182 47	—0,053 17	—0,113 07	—0,085 01	—0,077 01	—0,096 62	—0,068 80
0,7	2,007 17	—0,068 60	—0,115 04	—0,100 69	—0,077 47	—0,111 75	—0,068 51
0,75	1,803 84	—0,073 52	—0,112 84	—0,105 41	—0,073 61	—0,115 47	—0,063 86
0,8	1,579 35	—0,069 39	—0,108 34	—0,101 14	—0,067 49	—0,110 25	—0,057 04
0,85	1,340 88	—0,055 69	—0,102 81	—0,088 11	—0,060 48	—0,097 01	—0,049 54
0,9	1,095 42	—0,037 19	—0,098 18	—0,071 34	—0,054 39	—0,080 92	—0,043 68
0,95	0,849 39	—0,015 81	—0,095 25	—0,053 01	—0,049 91	—0,064 27	—0,038 20
1,0	0,608 38	0,005 99	—0,094 46	—0,035 45	—0,047 26	—0,049 18	—0,034 99
1,1	0,158 70	0,043 27	—0,098 79	—0,008 64	—0,046 40	—0,028 07	—0,032 18
1,2	—0,228 96	0,065 40	—0,107 54	0,003 79	—0,048 02	—0,019 62	—0,031 06
1,3	—0,545 49	0,071 13	—0,115 80	0,004 05	—0,048 48	—0,019 80	—0,029 05
1,4	—0,791 24	0,063 95	—0,120 04	—0,002 90	—0,046 10	—0,023 71	—0,025 50
1,5	—0,973 15	0,048 81	—0,118 87	—0,012 56	—0,040 98	—0,028 04	—0,020 97
1,6	—1,100 93	0,030 13	—0,112 54	—0,021 95	—0,034 09	—0,031 21	—0,016 26
1,7	—1,184 79	0,011 12	—0,102 24	—0,029 61	—0,026 53	—0,032 84	—0,012 00
1,8	—1,234 24	—0,006 31	—0,089 41	—0,035 10	—0,019 18	—0,033 13	—0,008 48
1,9	—1,257 41	—0,021 24	—0,075 34	—0,038 54	—0,012 57	—0,032 45	—0,005 78
2,0	—1,261 03	—0,033 37	—0,061 09	—0,040 29	—0,006 97	—0,031 17	—0,003 82
2,1	—1,250 45	—0,042 80	—0,047 38	—0,040 75	—0,002 43	—0,029 57	—0,002 46
2,2	—1,229 78	—0,049 83	—0,034 66	—0,040 32	0,001 12	—0,027 85	—0,001 57
2,3	—1,202 21	—0,054 84	—0,023 16	—0,039 29	0,003 81	—0,026 13	—0,001 02
2,4	—1,170 13	—0,058 18	—0,013 00	—0,037 88	0,005 78	—0,024 49	—0,000 70
2,5	—1,135 30	—0,060 20	—0,004 16	—0,036 28	0,007 16	—0,022 96	—0,000 55
3,0	—0,954 55	—0,059 00	0,023 54	—0,028 11	0,008 96	—0,017 12	—0,000 75
3,5	—0,798 46	—0,051 22	0,033 59	—0,021 97	0,007 67	—0,013 55	—0,001 11
4,0	—0,675 54	—0,043 36	0,035 61	—0,017 77	0,006 05	—0,011 23	—0,001 30
5,0	—0,579 82	—0,031 60	0,031 96	—0,012 75	0,003 74	—0,008 41	—0,001 35
6,0	—0,504 85	—0,024 22	0,026 64	—0,009 95	0,002 49	—0,006 75	—0,001 24

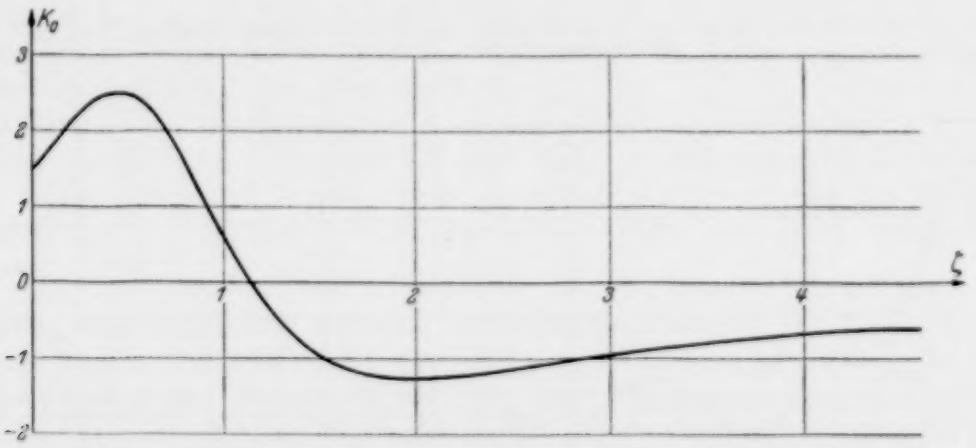

Abb. 8. Elementare Verformungsfunktion $K_0(\zeta) = \int_0^\infty \frac{P_0(\xi)}{\xi - \zeta}\, d\xi$.

funktionen im Reihenausdruck (21a) herangezogen. In diesem Fall wurden die sechs Koeffizienten a_ν so bestimmt, daß die Funktionen in 4 Punkten übereinstimmten und daß die beiden Stellen ihrer Maxima sich deckten.

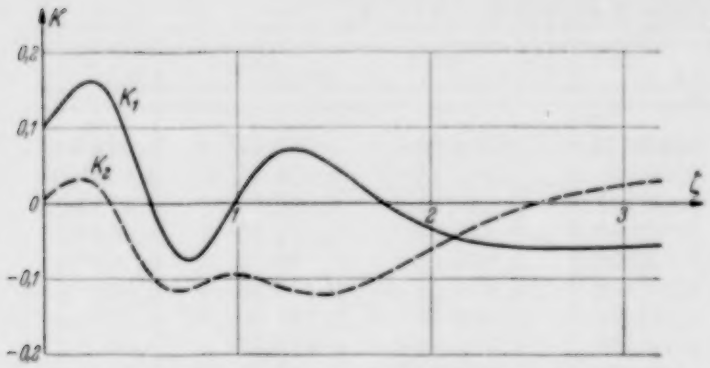

Abb. 9. Elementare Verformungsfunktionen $K_1(\zeta)$ und $K_2(\zeta)$.

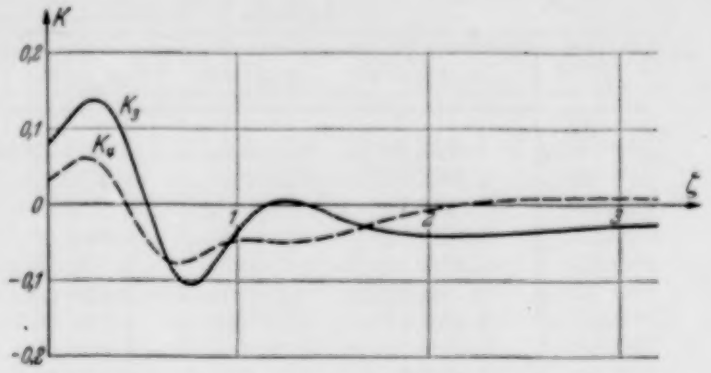

Abb. 10. Elementare Verformungsfunktionen $K_3(\zeta)$ und $K_4(\zeta)$.

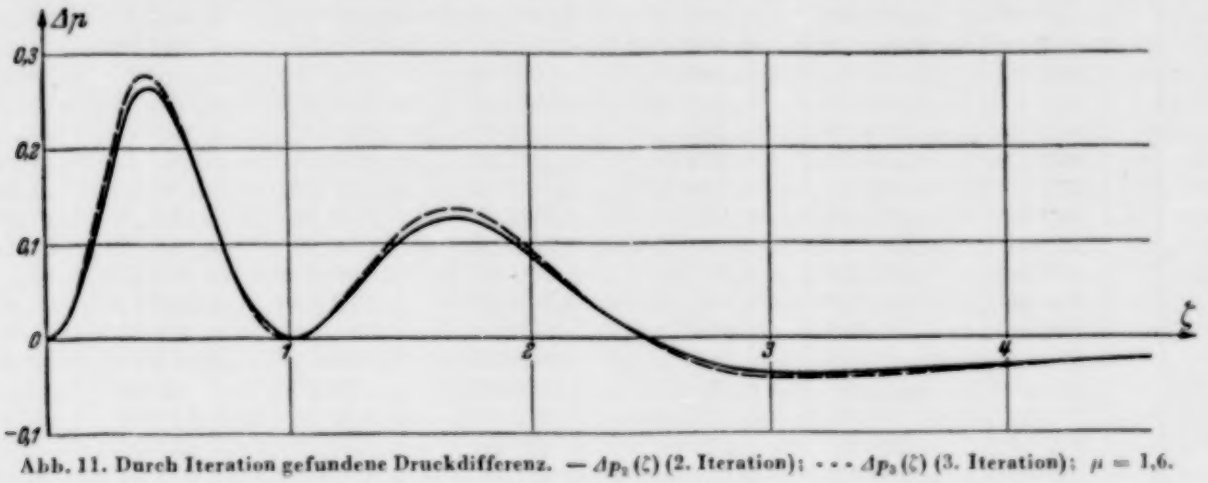

Abb. 11. Durch Iteration gefundene Druckdifferenz. — $\Delta p_2(\zeta)$ (2. Iteration); - - - $\Delta p_3(\zeta)$ (3. Iteration); $\mu = 1{,}6$.

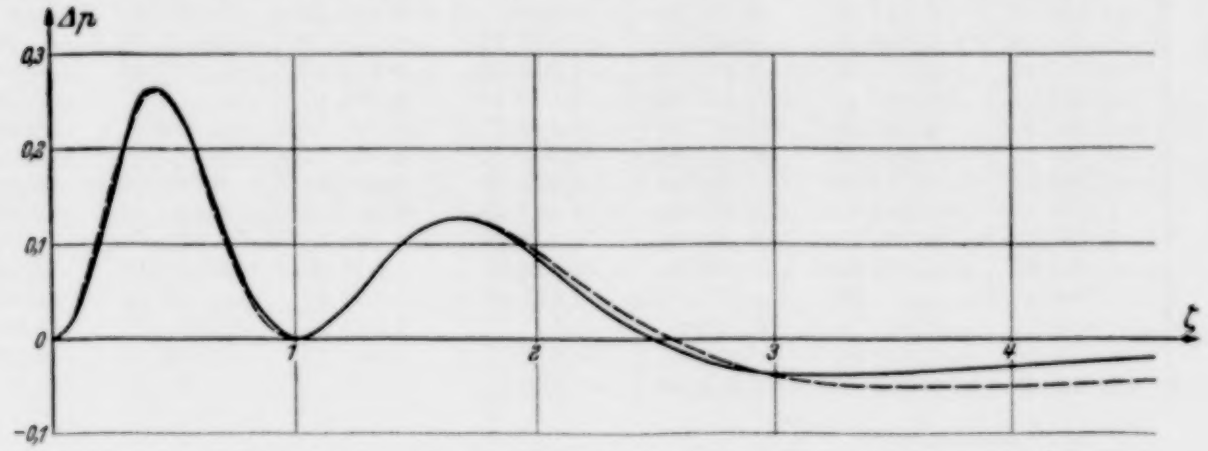

Abb. 12. — Durch 2. Iteration gefundene Druckdifferenz $\Delta p_2(\zeta)$; - - - Ersatzfunktion $\Delta p(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{6} a_\nu p_\nu(\zeta)$ als Grundlage für die 3. Iteration; $\mu = 1{,}6$.

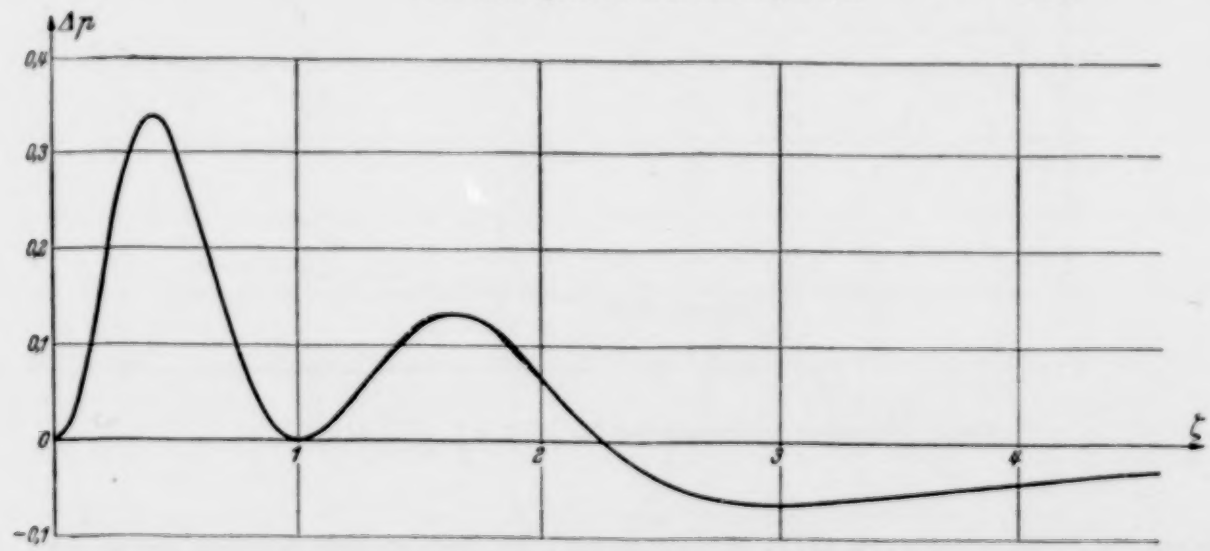

Abb. 13. — Durch 4. Iteration gefundene Druckdifferenz $\Delta p_4(\zeta)$;
- - - Ersatzfunktion $\Delta p[\zeta(\beta)] = (1 + \cos\beta) \sum_{n=1}^{23} c_n \sin n\beta$; $\mu = 1{,}7$.

Für $\mu = 1{,}7$ wurde $K(\zeta)$ für jede folgende Iteration mit Hilfe der Beziehungen (28) berechnet. Mit diesem μ-Wert treten beim Iterieren zum ersten Mal Schwierigkeiten auf. Die Δp-Kurven erster und zweiter Näherung weisen große Unterschiede auf. Die Δp-Kurve dritter Näherung liegt wieder nahe bei der erster Näherung, so daß das übliche Verfahren als vierte Näherung wieder ungefähr das Ergebnis der zweiten ergeben hätte. Um diesem Pendelvorgang auszuweichen, wurde die Druckdifferenz erster und zweiter Näherung gemittelt, so daß bei der vierten Näherung die Druckdifferenz

$$\frac{1}{2}\left\{[\Delta p(\zeta)]_1 + [\Delta p(\zeta)]_2\right\}$$

zugrunde lag. Das so erhaltene $[\Delta p]_4$ ist bereits eine sehr gute Näherungslösung, denn das damit berechnete $[\Delta p]_5$ unterscheidet sich im Rahmen der Zeichengenauigkeit kaum von $[\Delta p]_4$.

Abb. 13 zeigt die Δp-Kurve vierter Näherung und ihre Approximation durch

$$(1 + \cos\beta) \sum_{n=1}^{23} c_n \sin n\beta$$

für die fünfte Iterationsrechnung.

Für $\mu = 1{,}8$ wird das bei $\mu = 1{,}7$ bereits beobachtete Pendeln der Iterationslösungen stärker. Auch Mittelwertbildungen zwischen den Ergebnissen zweier aufeinander folgenden Iterationen führt nicht zur befriedigenden Konvergenz. Trotz langwieriger Versuche verschiedener Art ist noch keine genügend genaue Lösung bekannt. Die Zusammenstellung der Ergebnisse zeigt aber später, daß die Übersicht über den Parameterbereich $0 \leq \mu \leq 1{,}7$ bereits ziemlich klare Schlüsse darüber erlaubt, was in dem nicht untersuchten Restbereich $1{,}7 < \mu \leq 2$ eintreten wird.

Alle jetzt folgenden Abbildungen und Erläuterungen beziehen sich auf den jeweils letzten Iterationsschritt der Rechnungen.

Abb. 14 zeigt die Parameter A und $1/[(2-\mu)B^2]$ über μ aufgetragen. Die erste Kurve ist fast eine Gerade, die zweite weicht nicht viel von einer Konstanten ab. Diese Tatsache erleichtert die Vorherbestimmung von A und B bei Iterationsrechnungen für neue μ-Werte.

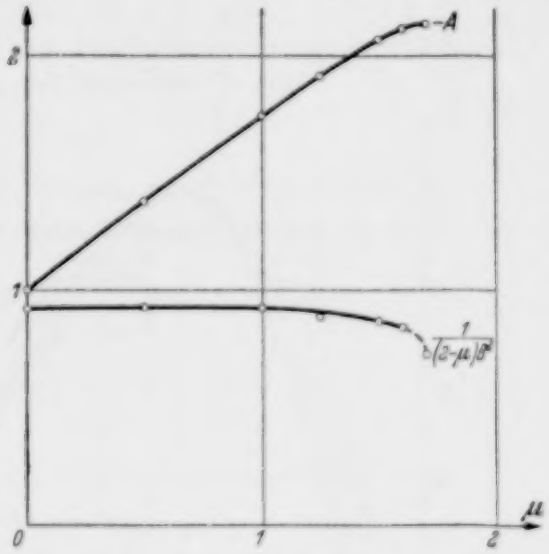

Abb. 14. Parameter $-A$ und $\frac{1}{(2-\mu)B^2}$ über μ aufgetragen.

Abb. 15 zeigt die Druckdifferenzen Δp und Abb. 16 die normierten Druckfunktionen $P = p_0 + \Delta p$ über ζ aufgetragen mit μ als Parameter. Man erkennt, wie mit $\mu \to 2$ die Druckkurven der Form der *Hertz*schen Halbellipse zustreben.

Abb. 17 gibt die Verformungsfunktionen über ζ aufgetragen wieder mit μ als Parameter. Hier erkennt man besonders deutlich, wie mit $\mu \to 2$ die Kurven im Bereich $0 \leq \zeta \leq 2$ der Geraden $2(1-\zeta)$ des *Hertz*schen Grenzfalles zustreben.

Abb. 18 zeigt noch für $\mu = 0$ und 1,0 und 1,7 die bezogene Spaltweite über ζ aufgetragen. Die Kurve für $\mu = 1{,}7$ läßt wieder deutlich erkennen, wie im Bereich $0 \leq \zeta \leq 2$ der Rollenrand durch den Einfluß der Schmiermittelkräfte sich einer horizontalen Geraden angeglichen hat.

9. Übertragung der Ergebnisse auf das wirkliche Rollenlager. a) Effektiver Rollenhalbmesser und effektiver Elastizitätsmodul. In unseren Untersuchungen wurde bisher der Untergrund als starr und eben angenommen. Was hier als Untergrund bezeichnet wird, ist aber in Wirklichkeit die Lagerschale oder die Lagerwelle, die beide im unverformten Zustand gleichmäßig gekrümmt sind.

Bei der Herleitung der Schmiermittelkräfte bleiben alle Beziehungen (2) bis (4) mit demselben Näherungsgrad gültig, wenn man an Stelle des ebenen Untergrundes einen gekrümmten wählt, sofern nur im Bereich, wo der Schmiermitteldruck nicht nahe bei Null ist, die Krümmungsradien der Randflächen groß sind in Bezug auf die Spaltweite $H(x)$.

Der Rollenradius sei R_r, der Wellenradius R_w, der innere Schalenradius R_s, dann sind alle bisherigen Ergebnisse gültig, wenn man in den Formeln für R folgenden effektiven Wert

einsetzt:

$$R = \frac{R_r R_w}{R_r + R_w} \qquad \text{bzw.} \qquad R = \frac{R_r R_s}{R_s - R_r}. \tag{29}$$

Der linke Ausdruck gilt für den Spalt zwischen Rolle und Welle, der rechte für den Spalt zwischen Rolle und Schale. Die Beziehungen (29) gibt auch *W. Peppler* [1] für das nichtverformbare Rollenlager an.

Schale und Welle haben nicht nur gekrümmte Oberflächen, sondern sind auch elastisch. Das unseren Untersuchungen zugrunde gelegte Verformungsgesetz in der differenzierten Form

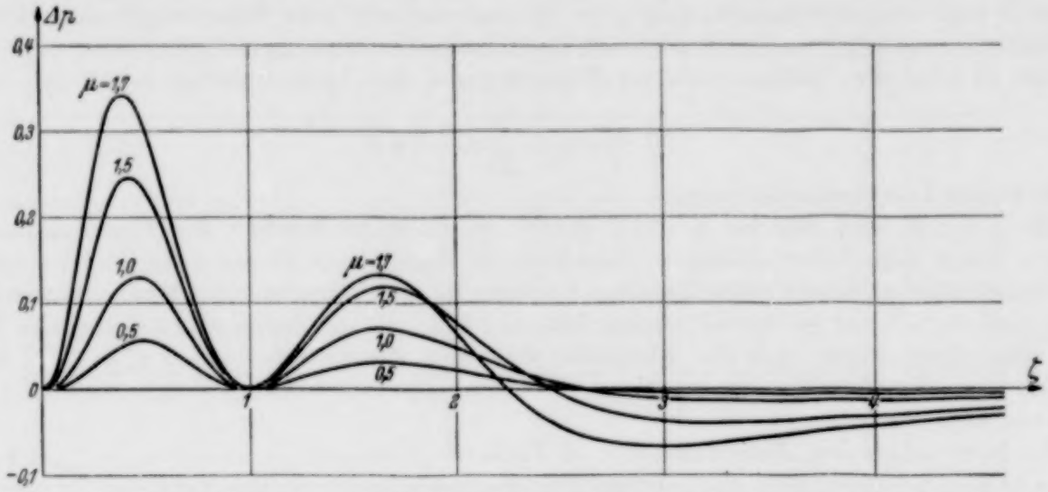

Abb. 15. Durch letzte Iteration gefundene Druckdifferenz $\Delta \bar{p}(\zeta)$; μ als Parameter.

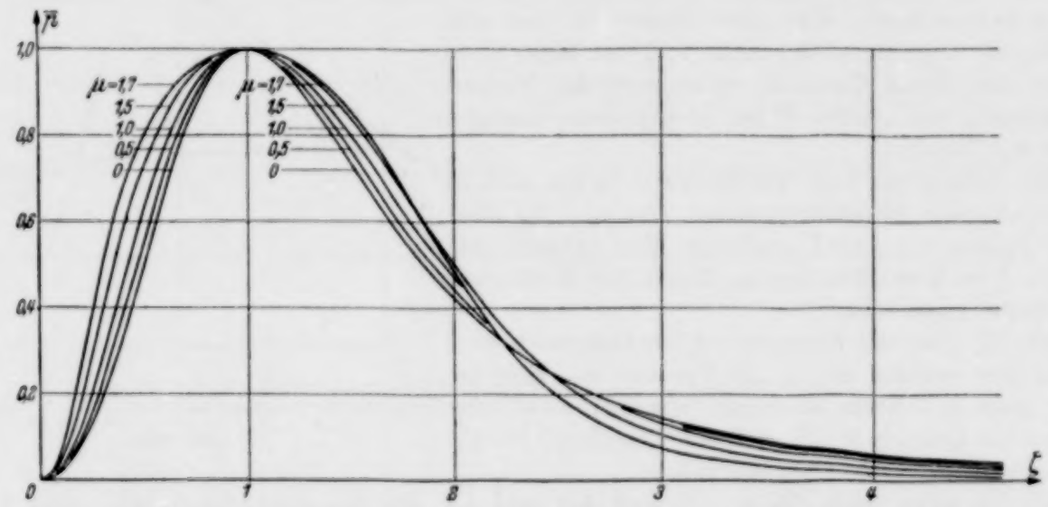

Abb. 16. Durch letzte Iteration gefundene normierte Druckfunktion $\bar{p}(\zeta) = p_0(\zeta) + \Delta p(\zeta)$; μ als Parameter.

(13c) ist wegen der in (10) vorgenommenen und dort begründeten Linearisierung vom Rollenradius gänzlich unabhängig. Es gilt deshalb, wie man auch direkt zeigen kann, für beliebige positive und negative Rollenradien. Das bedeutet, daß es auch für die Oberfläche von zylindrischen Bohrungen in einem unendlich ausgedehnten Körper und für den Grenzfall der ebenen Randfläche eines unendlichen Halbkörpers gilt. Näherungsweise gilt das Verformungsgesetz aber auch noch für die beiden Oberflächen von Kreisröhren und zwar umso genauer, je dicker die Röhrenwand bezogen auf den Radius der Bohrung ist. Die Bohrung braucht nicht einmal zentrisch zum Außenzylinder sein, wenn überall die Wandstärke groß gegenüber dem Bohrungsradius ist.

Diese Tatsache erlaubt eine wichtige Folgerung. Es seien E_r, E_w, E_s die Elastizitätsmoduln von Rolle, Welle und Schale. Dann bleiben alle bisher mitgeteilten Ergebnisse gültig, wenn

[1] A. a. O., Formel (5).

man für den in den Formeln auftretenden E-Modul folgende effektiven Werte einsetzt:

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{E_r\, E_w}{E_r + E_w} \\ \text{bzw.} \qquad & \\ E &= \frac{E_r\, E_s}{E_r + E_s}. \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Der linke Ausdruck bezieht sich auf den Spalt zwischen Rolle und Welle, der rechte auf den Spalt zwischen Rolle und Schale. Für den Spalt zwischen Rolle und Schale ist die Übertragung der Ergebnisse nur näherungsweise erlaubt. Wahrscheinlich ist die Näherung aber nicht nur dann gut, wenn die Lagerschale dick zum Innenradius ist, sondern auch dann noch, wenn die Schalendicke wenigstens von derselben Größe wie der Rollenradius ist. In unseren Herleitungen und Formeln wird nämlich nur ein Spaltbereich betrachtet, der schmal ist in Bezug auf den Rollenradius. Wenn dieser Spaltbereich auch schmal ist in Bezug auf die Schalendicke, so wird unser Verformungsgesetz in diesem schmalen Bereich auch für die Lagerschale näherungsweise

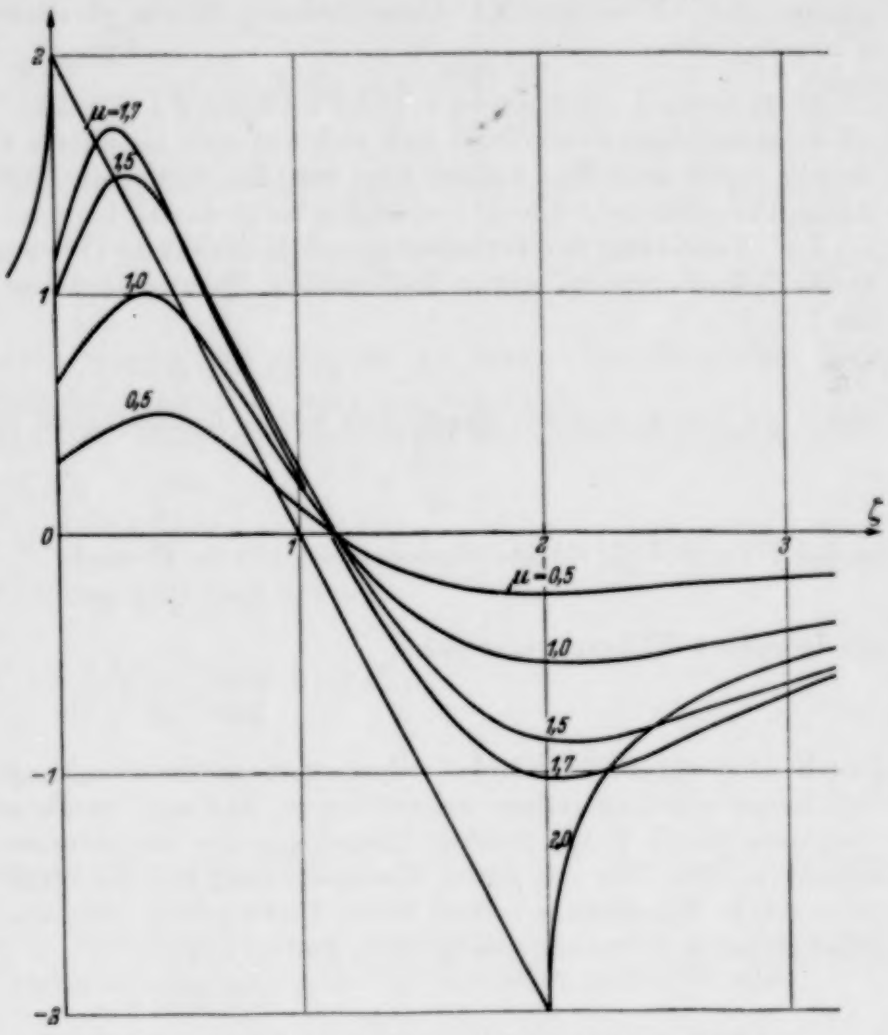

Abb. 17. Durch letzte Iteration gefundene Verformungsfunktion

$$\mu\,\frac{K(\zeta)}{K_{max}} = \frac{\mu}{K_{max}} \int_0^\infty \frac{p(\xi)}{\xi - \zeta}\, d\xi; \qquad \mu \text{ als Parameter.}$$

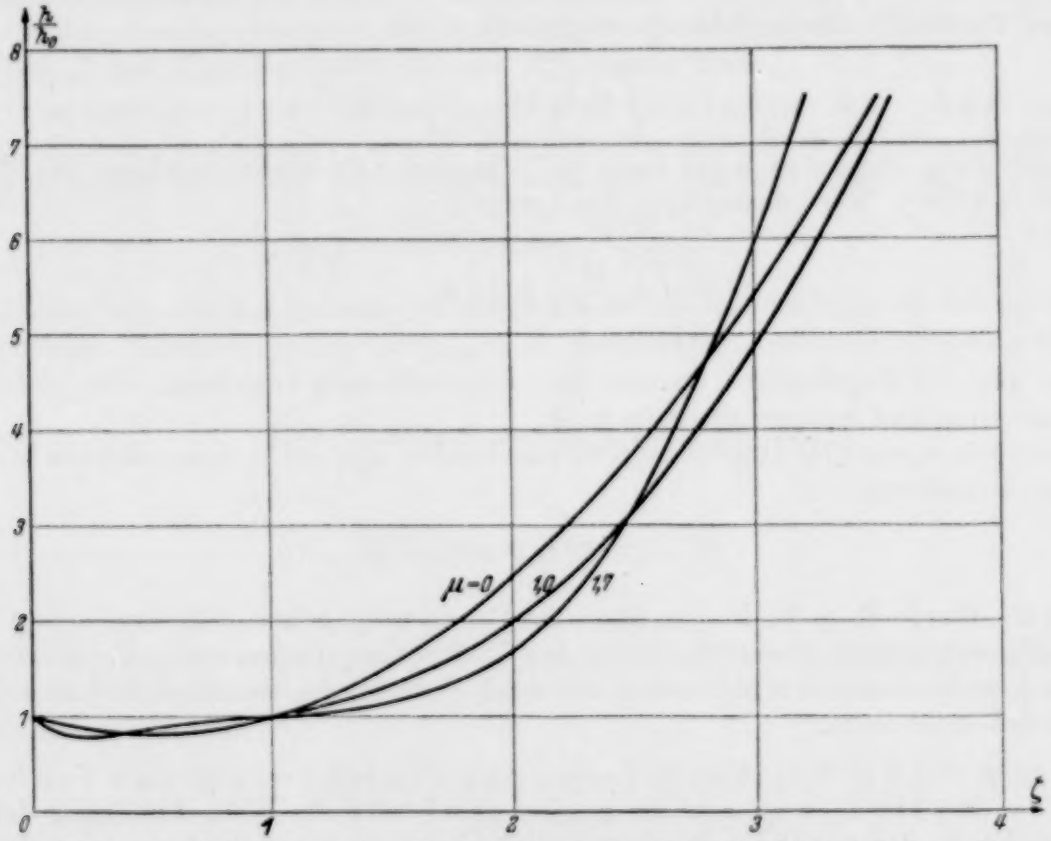

Abb. 18. Durch letzte Iteration gefundene bezogene Spaltweite $h(\zeta)/h(0)$; μ als Parameter.

gültig sein. Eine genaue Untersuchung dieses elastizitätstheoretischen Problems dürfte schwierig sein.

b) Berechnung des Streckungsmaßes λ. Alle berechneten Druck- und Verformungsfunktionen beziehen sich auf eine normierte Ortskoordinate ζ derart, daß $p'(0) = p'(1) = 0$ ist. Wir wollen nun von der dimensionslosen Koordinate ζ auf die wirkliche Längenkoordinate x übergehen und müssen dazu λ berechnen.

Zur Herleitung der asymptotischen Darstellung (19) wurde bereits erwähnt, daß $K(\zeta)$ für große ζ-Werte wie k/ζ gegen Null strebt. Daraus folgt aus (13a) für große ζ-Werte, das heißt für $\zeta \gg 1$

$$h''(\zeta) \approx 2\, B\, h(0)\,. \tag{31a}$$

Mit $x = \lambda\,\zeta + x_a$ und der Abkürzung $h(0) = h_0$ erhält man daraus die asymptotische Beziehung

$$\frac{d^2H}{dx^2} \approx \frac{2\,B\,h_0}{\lambda^2} \qquad \text{für} \qquad x \gg \lambda + x_a\,, \tag{31b}$$

wobei $H(x) \equiv h[\zeta(x)]$ ist. Andererseits gilt im Bereich

$$\lambda + x_a \ll x \ll R \tag{32a}$$

die bekannte Näherungsformel

$$\frac{d^2H}{dx^2} \approx \frac{1}{R}\,. \tag{32b}$$

Die Bedingung $x \ll R$ ist bei allen unseren Untersuchungen implizit vorausgesetzt worden. Wir haben nämlich immer angenommen, daß sich im Bereich des Druckberges und einer im Vergleich zu $(\lambda + x_a)$ großen Umgebung der unverformte Rollenrand durch eine Parabel annähern läßt. Nur mit dieser Voraussetzung hat der mathematische Grenzübergang $\zeta_b \to \infty$ (sehr starke Schmierung) einen Sinn. Dann gibt es aber einen Bereich (32a), für den (31b) und (32b) in guter Näherung gültig sind, und es folgt

$$\lambda^2 = 2\,B\,h_0\,R\,. \tag{33}$$

Diese Beziehung gilt, solange unsere hydrodynamische Grundbeziehung (2c) gültig ist, umso genauer, je kleiner h_0 ist. Auch *W. Peppler* macht bei seinen Untersuchungen für das unverformbare Rollenlager implizit dieselben Voraussetzungen.

In (33) ist der Rollenradius R vorgegeben, $B = B(\mu)$ durch die numerischen Rechnungen ermittelt, h_0 aber vorläufig noch unbekannt. Zur Berechnung von h_0 müssen wir auch noch die Gesamt-Rollenlast P je Einheitsbreite vorgeben. Es ist

$$P = \int_0^\infty q(x)\,dx = \lambda \int_0^\infty p(\zeta)\,d\zeta\,. \tag{34a}$$

Die wirkliche Druckfunktion $q(x)$ bzw. $p(\zeta)$ kennen wir nicht, sondern nur die bezogene Druckfunktion (13b). Wir können also das Integral

$$Q = \int_0^\infty \left[\frac{h_0^2}{6\,\eta\,V\,\lambda}\,p(\zeta)\right] d\zeta = \frac{h_0^2\,P}{6\,\eta\,V\,\lambda^2} \tag{34b}$$

unmittelbar aus den Ergebnissen unserer Iterationsrechnung ermitteln. Die Werte $Q = Q(\mu)$ sind dimensionslos und hängen nur von μ ab.

Berechnen wir h_0 aus (34b) und setzen diesen Ausdruck in (33) ein, so erhalten wir schließlich die gesuchte Beziehung

$$\lambda^2 = 24\,R^2\,\eta\,V\,B^2(\mu)\,\frac{Q(\mu)}{P}\,. \tag{35}$$

In (35) sind die Werte R, η, V, P als technische Daten vorgegeben, während B und Q durch die Iterationsrechnung geliefert werden, wenn der Verformungsparameter μ bekannt ist. Formel (35) ist also nur dann auswertbar, wenn wir noch μ durch die technischen Daten des Rollenlagers ausdrücken können.

c) Bestimmung des Verformungsparameters μ aus technischen Daten des Rollenlagers. In Formel (13a) wird die erste Ableitung der normalen Randverschiebung, die vorübergehend mit $\varrho'(\zeta)$ bezeichnet wird, durch den Ausdruck be-

schrieben

$$\varrho'(\zeta) = \mu\, B\, h_0 \frac{K(\zeta)}{K_{max}} \qquad \text{mit} \qquad K(\zeta) = \int_0^\infty \frac{p(\xi)}{\xi - \zeta}\, d\xi\,. \tag{36a}$$

Auf Grund von (11a) folgt durch Differentiation und Übergang auf die Koordinaten (12a)

$$\varrho'(\zeta) = \frac{2(1-\nu^2)\,\lambda}{\pi E} \int_0^\infty \frac{p(\xi)}{\xi - \zeta}\, d\xi\,. \tag{36b}$$

In unseren numerischen Rechnungen wurde (36a) für die normierts Druckfunktion $\bar{p}(\zeta)$ berechnet. Numerisch liegen nämlich die Funktionen $\bar{p}(\zeta)$ und $\bar{K}(\zeta)$ vor.

Die beiden Beziehungen (36a) und (36b) haben eine weitere für uns nützliche Beziehung zur Folge:

$$\frac{2(1-\nu^2)\,\lambda}{\pi E}\, p(\zeta) = \frac{\mu\, B\, h_0}{K_{max}}\, \bar{p}(\zeta)\,.$$

Durch Integration von $\zeta = 0$ bis $\zeta = \infty$ erhält man daraus

$$P = \frac{\pi E \mu\, B\, h_0}{2(1-\nu^2)\, K_{max}} \int_0^\infty \bar{p}(\zeta)\, d\zeta\,.$$

Hier stört der zunächst noch unbekannte Term h_0. Ersetzen wir in (35) die linke Seite durch die rechte Seite von (33), so finden wir

$$h_0 = 12\, R\, \eta\, V\, B(\mu) \frac{Q(\mu)}{P}\,. \tag{37}$$

Setzt man das in die vorhergehende Beziehung ein und bringt alle nur von μ abhängigen Glieder auf die eine und alle nicht von μ abhängigen auf die andere Seite, so erhält man

$$\frac{(1-\nu^2)\, P^2}{R\, \eta\, V\, E} = \frac{6\,\pi}{K_{max}}\, \mu\, B^2(\mu)\, Q(\mu) \int_0^\infty \bar{p}(\zeta)\, d\zeta. \tag{38}$$

Rechts steht ein Ausdruck, der eine eindeutige Funktion von μ darstellt und durch die Erebnisse der Iterationsrechnungen bekannt ist. Wenn also die linke Seite von (38) durch die Betriebsdaten des Rollenlagers vorgegeben ist, kann der zugehörige μ-Wert unmittelbar bestimmt werden. Die Werte R und E sind gemäß (29) und (30) einzusetzen.

d) Bestimmung der Mindestspaltweite und des größten Schmiermitteldruckes. Durch die numerischen Rechnungen ist die bezogene Spaltweite und somit auch der Wert h_{min}/h_0 bekannt. Deshalb folgt aus (37) unmittelbar

$$h_{min} = 12\, R\, \eta\, V\, B(\mu) \frac{Q(\mu)}{P} \frac{h_{min}}{h_0}\,. \tag{39}$$

Für die Technologie der Schmierung ist neben der Mindestdicke h_{min} des Schmierfilms auch noch der maximale Schmiermitteldruck p_{max} von Bedeutung. Seine Berechnung ist sehr einfach. Aus

$$P = \lambda \int_0^\infty p(\zeta)\, d\zeta = \lambda\, p_{max} \int_0^\infty \bar{p}(\zeta)\, d\zeta$$

folgt

$$p_{max} = \frac{P}{\lambda \int_0^\infty \bar{p}(\zeta)\, d\zeta}\,. \tag{40a}$$

Die normierte Druckfunktion $p(\zeta)$ und somit auch ihr von 0 bis ∞ genommenes Integral sind bekannt. Das Streckungsmaß λ ist durch (35) gegeben. Setzt man den aus (35) sich ergebenden Ausdruck ein, so erhält man:

$$p_{max} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{P^3}{\eta\, V}}\, \frac{1}{B(\mu)\sqrt{24\, Q(\mu)} \int_0^\infty \bar{p}(\zeta)\, d\zeta}\,. \tag{40b}$$

10. Zweckmäßige Fassung der Übertragungsbeziehungen und allgemeine Folgerungen. Wir kennen jetzt alle Beziehungen, die zur Übertragung unserer numerischen Ergebnisse auf ein wirkliches Rollenlager erforderlich sind. Die Umrechnung läßt sich aber wesentlich vereinfachen, wenn man einige von μ abhängige dimensionslose Funktionen einführt.

Zur technischen Auswertung der vorliegenden Ergebnisse muß man als erstes den zu den Betriebsdaten des Rollenlagers gehörigen μ-Wert kennen. Seine Bestimmung ist am einfachsten, wenn man (38) in folgender Form schreibt:

$$P\sqrt{\frac{1-\nu^2}{R\,\eta\,V\,E}} = \varphi(\mu) \tag{41a}$$

mit

$$\varphi(\mu) = B(\mu)\sqrt{\frac{6\,\pi\,\mu\,Q(\mu)\int_0^\infty \bar{p}(\zeta)\,d\zeta}{K_{max}}}\,. \tag{41b}$$

In Abb. 19 ist die Funktion

$$\varphi(\mu)\sqrt{\frac{2-\mu}{\mu}}$$

über μ dargestellt, da sich herausstellte, daß sie in dem untersuchten Bereich $0 \leq \mu \leq 1{,}7$ fast konstant ist. Sie weicht nur um höchstens $\pm$ 3,0 % vom Mittelwert 2,235 ab. Es gilt also in guter Näherung

$$\varphi(\mu) \approx 2{,}235\sqrt{\frac{\mu}{2-\mu}}\,. \tag{42a}$$

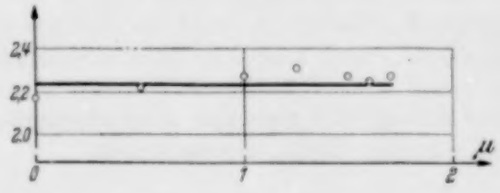

Abb. 19. ○ Berechnete Werte von $\varphi(\mu)\sqrt{\frac{2-\mu}{\mu}}$ — Mittelwert 2,235.

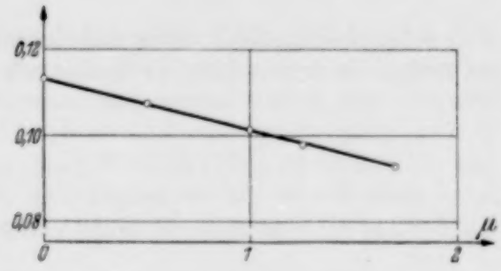

Abb. 20. ○ Berechnete Werte von $\frac{1}{(2-\mu)\,\varphi^2(\mu)}$ — Ersatzfunktion $\frac{10-\mu}{9{,}4^2}$.

Das erlaubt eine numerische Berechnung des Parameters μ mit einer Genauigkeit, die allen technischen Ansprüchen genügt. Man erhält, wenn man (42a) in (41a) einführt,

$$\mu \approx \frac{2}{1+\frac{5\,R\,\eta\,V\,E}{(1-\nu^2)\,P^2}}\,. \tag{42b}$$

Diese Näherungsbeziehung erleichtert die Auswertung unserer numerischen Ergebnisse in außerordentlicher Weise. Man muß es deshalb als Glücksfall ansehen, daß der Verformungsparameter μ in der Form (13a) definiert wurde. Zu Beginn der Untersuchung [1] wurde eine andere Definition des Verformungsparameters gewählt, der nicht das einfache Gesetz (42b) ergeben hätte. Diese alte Definition wurde fallen gelassen, weil sie zu mehreren Unannehmlichkeiten anderer Art führte.

Nachdem der μ-Wert bekannt ist, kann das Streckungsmaß λ bestimmt werden. Wir schreiben zu diesem Zweck (35) in folgender Form:

$$\lambda = R\sqrt{\frac{\eta\,V}{P}}\;\psi(\mu) \tag{43a}$$

mit

$$\psi(\mu) = B(\mu)\sqrt{24\,Q(\mu)}\,. \tag{43b}$$

Eine für manche Fragestellungen zweckmäßigere Form der Beziehung erhält man, wenn man hier P mit Hilfe von (41a) eliminiert:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{(1-\nu^2)\,\eta\,V\,R^3}{E}}\;\frac{\psi(\mu)}{\sqrt{\varphi(\mu)}}\,. \tag{43c}$$

[1] *J. Dörr*, Z. angew. Math. Mech. 32 (1952) 268.

Die durch (43b) definierte Hilfsfunktion $\psi(\mu)$ hat eine einfache Form, die man am besten erkennt, wenn man

$$\frac{1}{\psi^2(\mu)\,(2-\mu)}$$

über μ aufträgt. Das ist in Abb. 20 geschehen. Die Kurve ist fast linear und strebt monoton fallend vom Wert 0,113 zum Wert 0,093, wenn μ von 0 bis 1,7 zunimmt. Es gilt also in sehr guter Näherung

$$\psi(\mu) \approx \frac{9{,}4}{\sqrt{(2-\mu)\,(10-\mu)}}\,. \tag{44a}$$

Damit erhalten wir anstelle von (43a) und (43c) die Näherungsbeziehungen

$$\hat{\lambda} \approx 9{,}4\,R\sqrt{\frac{\eta\,V}{P}\,\frac{1}{(2-\mu)\,(10-\mu)}}\,, \tag{44b}$$

$$\hat{\lambda} \approx 6{,}27\sqrt[4]{\frac{(1-\nu^2)\,\eta\,V\,R^3}{E}\,\frac{1}{\mu\,(2-\mu)\,(10-\mu)^2}}\,. \tag{44c}$$

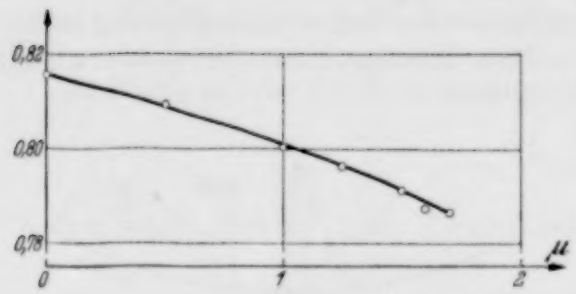

Abb. 21. ○ Berechnete Werte von $\frac{h_{min}}{h_0}$ — Interpolationskurve.

Abb. 22. ○ Berechnete Werte von $\frac{1}{(2{,}7-\mu)\,\sigma(\mu)}$ — Mittelwert 0,154.

Die Beziehung (39) für die Mindestspaltweite h_{min} schreiben wir in der Form

$$h_{min} = \frac{R\,\eta\,V}{P}\,\sigma(\mu) \tag{45a}$$

mit

$$\sigma(\mu) = 12\,B(\mu)\,Q(\mu)\,\frac{h_{min}}{h_0} \tag{45b}$$

oder

$$\sigma(\mu) = \frac{\psi^2(\mu)}{2\,B(\mu)}\,\frac{h_{min}}{h_0}\,. \tag{45c}$$

Der Quotient h_{min}/h_0, der in Abb. (21) dargestellt ist, nimmt von $\mu = 0$ bis $\mu = 1{,}7$ von 0,8157 auf 0,7866 monoton ab, ändert sich also in diesem Bereich nur um $\pm$ 1,8 %, wenn man auf einen Mittelwert bezieht. Das bedeutet, daß das Verhältnis zwischen Mindestspaltweite und der Spaltweite am Beginn des Druckberges nur wenig von der Spaltverformung beeinflußt wird.

In Abb. 22 ist

$$\frac{1}{\sigma(\mu)\,(2{,}7-\mu)}$$

dargestellt. Diese Funktion ist fast konstant und schwankt im Bereich $0 \leq \mu \leq 1{,}7$ nur um $\pm$ 1,8 % um den Mittelwert 0,1540. Es gilt also für $0 \leq \mu \leq 1{,}7$ in sehr guter Näherung

$$\sigma(\mu) = \frac{6{,}5}{2{,}7-\mu} \tag{45d}$$

und

$$h_{min} = \frac{R\,\eta\,V}{P}\,\frac{6{,}5}{2{,}7-\mu}\,. \tag{45e}$$

Die Beziehung für den maximalen Schmiermitteldruck schreiben wir in der Form

$$p_{max} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{P^3}{\eta\,V}}\,\vartheta(\mu) \tag{46a}$$

mit

$$\vartheta(\mu) = \frac{1}{\psi(\mu) \int_0^\infty \bar{p}(\zeta)\, d\zeta}\,. \tag{46b}$$

Trägt man die numerisch vorliegenden Werte von

$$\frac{2-\mu}{\vartheta^2(\mu)}$$

über μ auf, wie es in Abb. 23 geschehen ist, so streuen die Punkte mit einem Größtfehler von $\pm$ 1,9 % um die Gerade 4,78 ($\mu + 5{,}3$). Daraus folgt für $0 \leq \mu \leq 1{,}7$ die Näherungsbeziehung

$$\vartheta(\mu) = 0{,}457 \sqrt{\frac{2-\mu}{5{,}3+\mu}} \tag{46c}$$

mit einem Fehler von höchstens $\pm$ 1 %.

Damit haben wir für alle Funktionen, die zur Übertragung unserer numerischen Ergebnisse auf wirkliche Rollenlager erforderlich sind, handliche Näherungsformeln entwickelt. Diese Näherungsformeln sind etwa ebenso genau, wie die Eregbnisse des Iterationsverfahrens selber. Man darf annehmen, daß sie nicht nur für den untersuchten Parameterbereich, sondern auch noch für etwas größere μ Werte, etwa bis $\mu = 1{,}85$ gültig sind.

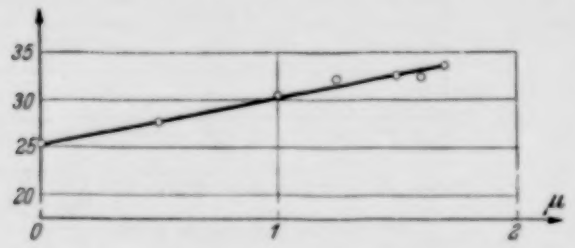

Abb. 23. ○ Berechnete Werte von $\frac{2-\mu}{\vartheta^2(\mu)}$, — Ersatzfunktion 4,78 ($\mu + 5{,}3$).

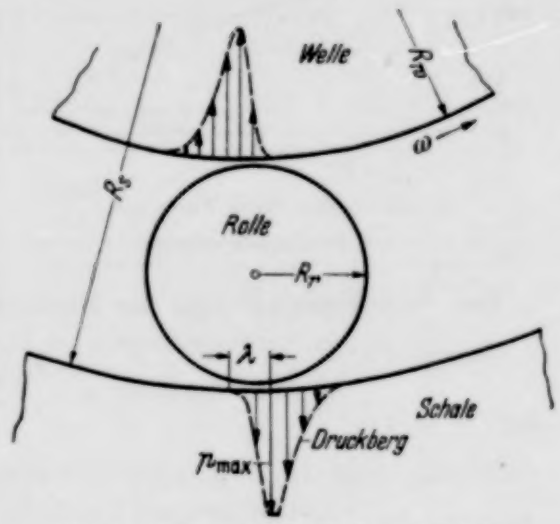

Abb. 24. Rolle zwischen Welle und Schale.

11. Auswertung und Zusammenfassung der Ergebnisse. Für das verformbare, geschmierte Rollenlager werden Schmiermitteldruck und Randverformung numerisch bestimmt, indem die nichtlineare Integralgleichung des Problems durch ein Iterationsverfahren mit technisch ausreichender Genauigkeit gelöst wird. Die Schmiermittelströmung wird dabei als laminar, die Viskosität als unabhängig von Druck und Temperatur angenommen. Die relative Spaltverformung wird durch einen Verformungsparameter μ beschrieben, wobei der Bereich $0 \leq \mu \leq 2$ alle möglichen Verformungszustände erfaßt. Mit dem angewandten Verfahren gelingt die Lösung des Problems für den Bereich $0 \leq \mu \leq 1{,}7$, also für 85 % des Gesamtbereiches.

Durch das Zusammenwirken von hydrodynamischen und elastizitätstheoretischen Erscheinungen wirken beim Rollenlagerproblem zahlreiche physikalische Größen ineinander. Das erschwert die numerische Rechnung und auch das anschauliche Verstehen der formelmäßigen Zusammenhänge. Bei den mathematischen Herleitungen und numerischen Auswertungen werden deshalb die Längen, Drücke und Verformungen durch dimensionslose Variablen und Parameter ausgedrückt. Die so gefundenen Ergebnisse müssen für die Anwendung auf ein wirkliches Rollenlager durch gewisse Übertragungsbeziehungen umgerechnet werden. Die gewählte Definition des Verformungsparameters erlaubt es, für diese Übertragungsbeziehungen einfache Näherungsformeln anzugeben, die allen technischen Genauigkeitsansprüchen genügen. Die Anwendung dieser Übertragungsbeziehungen, das heißt der Gang der technischen Auswertung wird im Folgenden zusammengestellt.

Wir betrachten die beiden Schmiermittelspalte zwischen Rolle und Schale sowie zwischen Rolle und Welle des in Abb. 24 dargestellten Systems. Die Elastizitätsmoduln und Radien von Rolle, Welle und Schale werden durch die Indizes r, w und s gekennzeichnet. Für den effektiven Elastizitätsmodul E und den effektiven Radius R gilt dann beim Spalt zwischen

Rolle und Welle:	Rolle und Schale:
$R = \frac{R_r R_w}{R_r + R_w}$	$R = \frac{R_r R_s}{R_s - R_r}$
$E = \frac{E_r E_w}{E_r + E_w}$	$E = \frac{E_r E_s}{E_r + E_s}$.

Die Welle drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Bei geringem Schlupf zwischen Rolle und Welle sowie zwischen Rolle und Schale gilt für die Summe der auf die Stelle kleinster Spaltweite bezogenen Randgeschwindigkeiten eines Spaltes

$$V = V_1 + V_2 \approx \omega R_w .$$

Die Welle drücke mit der Kraft P pro Einheitslänge auf die betrachtete Rolle. Dann ergibt sich für den Verformungsparameter der Wert

$$\mu = \frac{2}{1 + \frac{5 R \eta V E}{(1 - \nu^2) P^2}} ,$$

wobei η die Zähigkeit des Schmiermittels und ν die Querdehnungszahl ist, die hier für Rolle, Welle und Schale als gleich angenommen wird.

Als Mindestdicke des Schmiermittelfilms findet man

$$h_{min} = \frac{R \eta V}{P} \frac{6{,}5}{2{,}7 - \mu} .$$

Der größte Schmiermitteldruck, das heißt das Maximum des Druckberges ist

$$p_{max} = \frac{0{,}457}{R} \sqrt{\frac{P^3}{\eta V} \frac{2 - \mu}{5{,}3 + \mu}} .$$

Der Abstand zwischen dem Orte des Druckmaximums und dem Ende des Druckberges auf der Spaltseite, wo sich der Rollenrand substantiell vom Rand der Welle bzw. Schale abhebt, ergibt sich zu

$$\lambda = 9{,}4 R \sqrt{\frac{\eta V}{P} \frac{1}{(2 - \mu)(10 - \mu)}} .$$

Der Fehler dieser Näherungsbeziehungen ist höchstens etwa $\pm 3\,\%$ für den Parameterbereich $0 \leq \mu \leq 1{,}7$. Genauere Ergebnisse erhält man, wenn man anstelle der Näherungsformel für μ die in Abb. 19 eingetragenen genaueren numerischen Werte zugrunde legt.

Mit λ und p_{max} läßt sich die wirkliche Druckkurve $q(x)$ aus den in Abb. 16 dargestellten normierten Druckkurven $\bar{p}(\zeta)$ für jeden μ-Wert im Bereich $0 \leq \mu \leq 1{,}7$ bestimmen. Eine gegebenenfalls notwendige Interpolation bringt dabei nur geringfügige Fehler, da sich die Kurven $\bar{p}(\zeta)$ nur wenig mit μ ändern.

Auch die wirkliche Spaltform $H(x)$ läßt sich aus Abb. 18 leicht bestimmen, wenn λ und h_{min} bekannt sind.

Die hier behandelten Probleme wurden für das Rollenlager mit kleiner Verformung, das heißt für kleine μ-Werte bereits von *A. Meldahl*, *C. Weber* und *H. Blok* mit Näherungsansätzen untersucht. Herr Prof. *H. Blok* (Techn. Hochsch. Delft) hatte die Freundlichkeit, einige der hier mitgeteilten genaueren Ergebnisse mit denen der drei genannten Autoren zu vergleichen. Die von *A. Meldahl* und *C. Weber* für $\mu < 0{,}5$ gefundenen Ergebnisse erwiesen sich dabei in leidlich guter Übereinstimmung mit meinen. Die Ergebnisse von *H. Blok* stimmen bei kleinen μ-Werten fast genau mit meinen überein, während sie für wachsende μ-Werte ($\mu > 0{,}5$) eine größer werdende systematische Abweichung aufweisen.

(Eingegangen am 6. August 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Johannes Dörr*, Institut für Praktische Mathematik der Technischen Hochschule (16) Darmstadt.

Rechnerischer Ausgleich von Meßkurvenscharen.

Von H. Freytag.

1. Einführung in die Aufgabenstellung. Bei der experimentellen Untersuchung der Abhängigkeit einer physikalischen Meßgröße m von zwei von einander unabhängigen Einflußgrößen (z. B. von der Frequenz f und der Temperatur t) geht man gewöhnlich so vor, daß man die eine Einflußgröße jeweils während einer Meßreihe konstant hält und die andere variiert. Welche Einflußgröße dabei innerhalb der Meßreihe konstant gehalten, und welche variiert wird, hängt von der Aufgabenstellung und der Einstellbarkeit und Reproduzierbarkeit der Einflußgrößen ab. Auch bei der graphischen Darstellung der Funktion in Form einer Kurvenschar ist es im allgemeinen ohne Belang, welche Einflußgröße man als Abszisse wählt und welche als Parameter. Diese Freizügigkeit ist jedoch durchaus nicht immer gegeben. Wenn sich die zu untersuchende Größe m in den betrachteten Bereichen relativ zu ihrem Anfangswert nur wenig ändert, so wird es der meßtechnisch Erfahrene vermeiden, die Änderungen von m aus der Differenz zweier ungefähr gleich großer Meßwerte zu errechnen; er wird vielmehr zur Steigerung der Meßgenauigkeit ein Verfahren wählen, das die unmittelbare Messung der Differenz selbst gestattet. Es ist dann bei geschickter Versuchsanordnung meist möglich, den Gang der Meßgröße m bei Variation einer Einflußgröße mit wesentlich größerer absoluter Genauigkeit zu bestimmen als den Anfangswert von m selbst. In diesem Fall ist man in der Wahl des Parameters nicht mehr frei. Hat man beispielsweise den Frequenzgang [1] der Meßgröße bei mehreren konstanten Temperaturen aufgenommen, so muß man auch beim Auftragen die Temperatur als Parameter wählen, weil von jeder Kurve $m = F_1(f)$ die Gestalt (die durch die Ordinatendifferenzen der Meßpunkte definiert ist) wesentlich genauer bekannt ist als ihre Höhenlage; denn die Ordinaten jeder Kurve sind sämtlich um den gleichen Betrag gefälscht, den (nach unserer Voraussetzung wesentlich größeren) Meßfehler des Anfangswertes von m (vergl. hierzu Abb. 1). Dieser Fehler hat für jede Kurve einen anderen Wert. Es wäre daher verfehlt, aus den Meßwerten des Frequenzganges bei verschiedenen festen Temperaturen Kurven des Temperaturganges bei verschiedenen festen Frequenzen bilden zu wollen, da die zur gleichen Frequenz gehörenden Meßpunkte untereinander zu sehr streuen. Man muß vielmehr den Temperaturgang von m bei verschiedenen festen Frequenzen gesondert aufnehmen. Trägt man die Ergebnisse mit der Frequenz als Parameter in Kurvenform auf, so ist auch hier die Gestalt der Kurven genauer bekannt als ihre Höhenlage (vgl. Abb. 2).

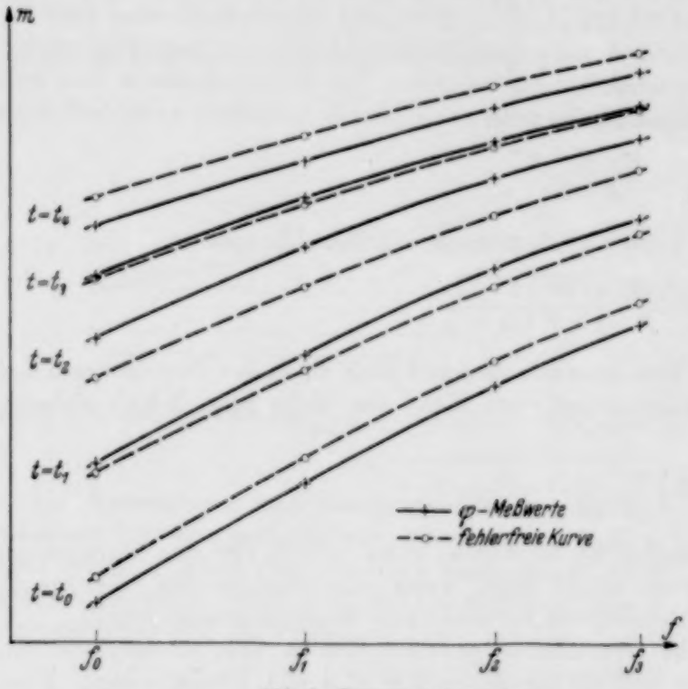

Abb. 1. Frequenzgang von m.

Wenn man nun derartige mittels eines Differenz-Meßverfahrens ermittelte Kurvenscharen des Frequenzganges und Temperaturganges vorliegen hat (die zweckmäßig unter Benutzung stets derselben Meßfrequenzen und Meßtemperaturen aufgenommen werden), so sollte man annehmen, es könne nicht schwer fallen, aus diesen Kurvenscharen wie bei rechnerisch ermittelten Kurven das Liniennetz der gesamten Fläche $m = F(f, t)$ mittels gegenseitiger graphischer

[1] Wir verwenden im folgenden der Kürze halber als Beispiele der Einflußgrößen Frequenz und Temperatur, ohne damit die Allgemeinheit der Gedankengänge einschränken zu wollen.

Interpolation genügend genau zu bestimmen und darzustellen. Ein Versuch zeigt jedoch, daß dies nicht ohne weiteres möglich ist, weil die Meßwerte des Frequenzgangs und des Temperaturgangs einander zum Teil widersprechen. Man sieht dies am deutlichsten, wenn man die Meßpunkte des Temperaturgangs in das Diagramm des Frequenzgangs mit einträgt. Dies ist in Abb. 3 für 5×4 Meßwerte ausgeführt. In dieser Abbildung und im folgenden Text sind zur leichteren Unterscheidung die aus Messungen des Frequenzganges stammenden Meßwerte von m mit φ, die aus Messungen des Temperaturganges stammenden mit τ bezeichnet. Der erste Index bezieht sich auf die Frequenz, der zweite auf die Temperatur.

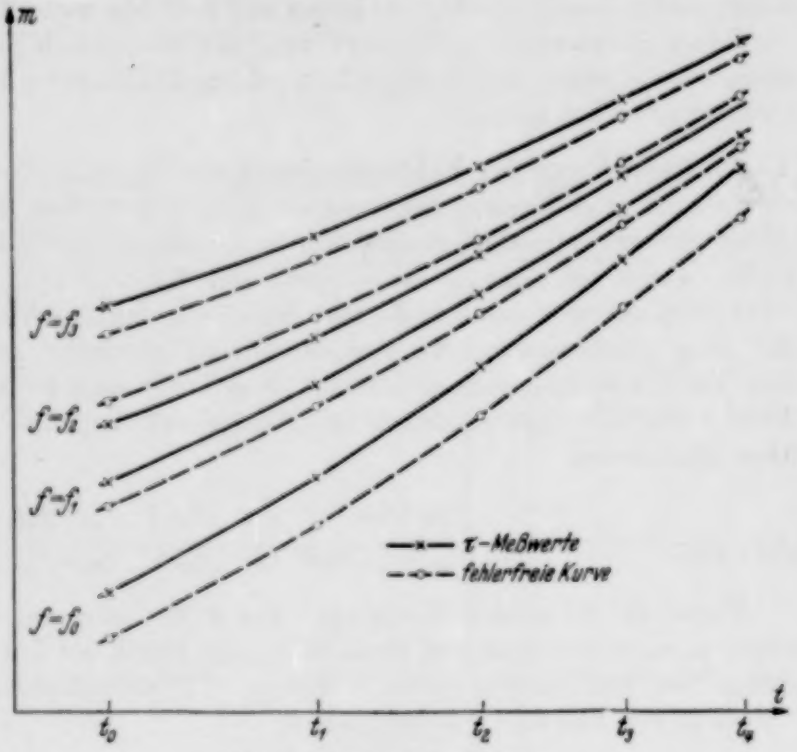

Abb 2. Temperaturgang von m.

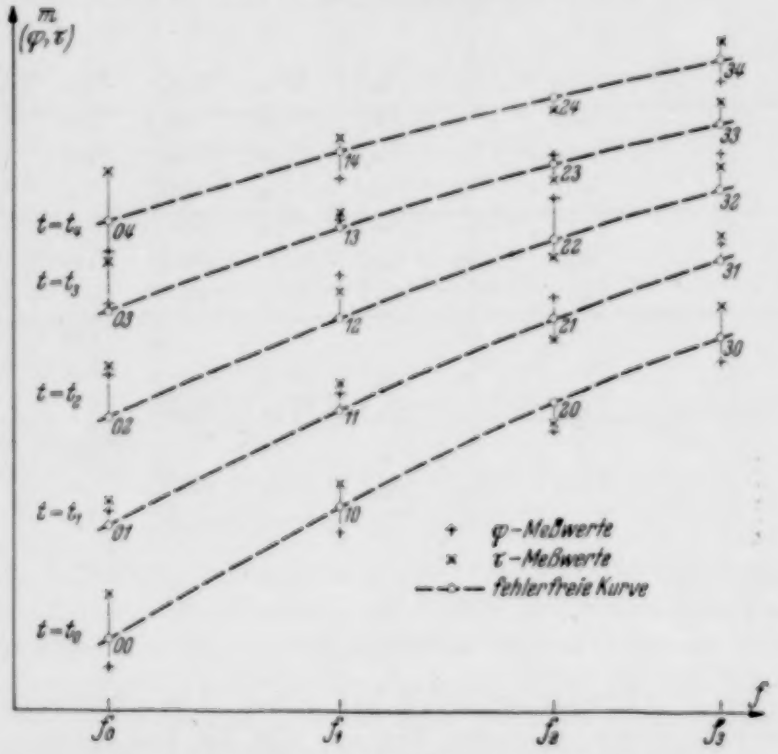

Abb. 3. Gegenüberstellung der φ- und τ-Meßwerte.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, aus der Überlagerung zweier offenbar fehlerbehafteter Netze von je 5×4 Meßpunkten das ausgeglichene, d. h. von Fehlern so gut wie möglich befreite Netz abzuleiten. Dies erscheint auf den ersten Blick recht einfach. Da für jeden Zustand $f = f_i$, $t = t_k$ zwei Meßergebnisse vorliegen, liegt es nahe, jeweils deren arithmetisches Mittel als den wahrscheinlichsten Wert anzusehen. Bei einem derartigen Vorgehen würde aber die höhere Genauigkeit, mit der die Differenzen $\Delta\varphi$ und $\Delta\tau$ gemessen wurden, neben den größeren Fehlern der Anfangswerte von φ und τ nicht zur Geltung kommen können; Frequenz- und Temperaturgang von m würden auf diese Weise gröblich verfälscht werden. Ein anderer naheliegender Gedanke wäre der, die einzelnen Kurven des Frequenzgangs und des Temperaturgangs ohne Gestaltänderung parallel zu sich selbst in Richtung der Ordinatenachse solange zu verschieben, bis φ-Netz und τ-Netz in Abb. 3 zur Deckung kommen. Ein derartiger Versuch müßte zum Ziel führen, wenn die Differenzen $\Delta\varphi$ und $\Delta\tau$ vollkommen fehlerfrei gemessen wären. Da jedoch auch diese Differenzen gewisse (nach unserer Voraussetzung allerdings kleine) Fehler aufweisen, läßt sich der Ausgleich nicht ohne kleine Gestaltänderungen der Kurven durchführen. Es leuchtet ein, daß diejenige Lösung die größte Wahrscheinlichkeit für sich hat, bei der die Korrekturen an der Gestalt der Kurven am kleinsten sind. Ein solcher Ausgleich läßt sich freilich durch Probieren nicht einwandfrei durchführen. Deswegen wurde nach der *Gauß*schen Methode der kleinsten Quadratsumme ein Rechenverfahren entwickelt, das den Ausgleich im obigen Sinne, frei von Willkür und ohne zeitraubendes Probieren ermöglicht.

Es ist bekannt, daß der in der Industrie Tätige Ausgleichsrechnungen scheut, da sie in der Regel langwierige Rechnungen erfordern. Deswegen sei im Voraus bemerkt, daß das im folgen-

den beschriebene Verfahren soweit durchgebildet wurde, daß es nicht mehr notwendig ist, für jeden Einzelfall die Normalgleichungen von neuem aufzustellen und in bekannter Weise durch schrittweise Ausmerzung der Unbekannten zu lösen. Es werden vielmehr für die an jedem Meßpunkt anzubringenden Verbesserungen einfache Formeln angegeben, mit denen sich die Verbesserungen schnell berechnen lassen. Das Rechenverfahren ist nicht auf 5×4 Meßpunkte beschränkt, sondern ohne weiteres auf beliebig viele Meßpunkte anwendbar. Abgesehen von der oben genannten Voraussetzung einer wesentlich höheren Meßgenauigkeit bei der Bestimmung des Ganges der Meßgröße wird an die Kurven nur die eine Bedingung gestellt, daß sie stetig verlaufen müssen.

2. Aufstellung der Fehlergleichungen. Das von *Gauß* angegebene Verfahren zum rechnerischen Ausgleich unsystematischer Fehler geht von der Forderung aus, daß die Summe der Quadrate der anzubringenden Verbesserungen ein Minimum werden soll. Da es in unserem Falle darauf ankommt, die Gestalt der Kurven möglichst wenig zu ändern, haben wir als Verbesserungen v im *Gauß*schen Sinne die Unterschiede zwischen den Ordinatendifferenzen der ausgeglichenen Kurve und der ihr entsprechenden φ- bzw. τ-Kurve anzusetzen. Bezeichnen wir die ausgeglichenen Meßgrößen mit r und benummern die φ-, τ- und r-Werte wie in Abb. 1 und 2, so ist demnach zu fordern, daß folgende Differenzen paarweise möglichst genau übereinstimmen:

$$r_{10}-r_{00} \text{ mit } \varphi_{10}-\varphi_{00}\,; \quad r_{20}-r_{00} \text{ mit } \varphi_{20}-\varphi_{00} \text{ usw.,}$$

aber auch

$$r_{01}-r_{00} \text{ mit } \tau_{01}-\tau_{00}\,; \quad r_{02}-r_{00} \text{ mit } \tau_{02}-\tau_{00} \text{ usw.}$$

Wenn die φ- und τ-Messungen bei a Meßfrequenzen und b Meßtemperaturen ausgeführt wurden, so lassen sich auf diese Weise an Hand der $2\,a\,b$ Punkte zahlreiche Fehlergleichungen aufstellen, und zwar ergeben sich $b\,(a-1)$ Gleichungen aus den φ-Differenzen und $a\,(b-1)$ Gleichungen aus den τ-Differenzen.

Fehlergleichungen für $a = 4$ Meßfrequenzen und $b = 5$ Meßtemperaturen ($i = 0 \ldots 3$, $k = 0 \ldots 4$).

$$\begin{aligned}
v_{\varphi 10} &= (r_{10}-r_{00})-(\varphi_{10}-\varphi_{00}),\\
v_{\varphi 20} &= (r_{20}-r_{00})-(\varphi_{20}-\varphi_{00}),\\
v_{\varphi 30} &= (r_{30}-r_{00})-(\varphi_{30}-\varphi_{00}),\\
v_{\varphi 11} &= (r_{11}-r_{01})-(\varphi_{11}-\varphi_{01}),\\
v_{\varphi 21} &= (r_{21}-r_{01})-(\varphi_{21}-\varphi_{01}),\\
v_{\varphi 31} &= (r_{31}-r_{01})-(\varphi_{31}-\varphi_{01}),\\
v_{\varphi 12} &= (r_{12}-r_{02})-(\varphi_{12}-\varphi_{02}),\\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\
v_{\varphi 32} &= (r_{32}-r_{02})-(\varphi_{32}-\varphi_{02}),\\
v_{\varphi 13} &= (r_{13}-r_{03})-(\varphi_{13}-\varphi_{03}),\\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\
v_{\varphi 33} &= (r_{33}-r_{03})-(\varphi_{33}-\varphi_{03}),\\
v_{\varphi 14} &= (r_{14}-r_{04})-(\varphi_{14}-\varphi_{04}),\\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\
v_{\varphi 34} &= (r_{34}-r_{04})-(\varphi_{34}-\varphi_{04}),
\end{aligned}$$

(15 Gleichungen)

$$\begin{aligned}
v_{\tau 01} &= (r_{01}-r_{00})-(\tau_{01}-\tau_{00}),\\
v_{\tau 02} &= (r_{02}-r_{00})-(\tau_{02}-\tau_{00}),\\
v_{\tau 03} &= (r_{03}-r_{00})-(\tau_{03}-\tau_{00}),\\
v_{\tau 04} &= (r_{04}-r_{00})-(\tau_{04}-\tau_{00}),\\
v_{\tau 11} &= (r_{11}-r_{10})-(\tau_{11}-\tau_{10}),\\
v_{\tau 12} &= (r_{12}-r_{10})-(\tau_{12}-\tau_{10}),\\
v_{\tau 13} &= (r_{13}-r_{10})-(\tau_{13}-\tau_{10}),\\
v_{\tau 14} &= (r_{14}-r_{10})-(\tau_{14}-\tau_{10}),\\
v_{\tau 21} &= (r_{21}-r_{20})-(\tau_{21}-\tau_{20}),\\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\
v_{\tau 24} &= (r_{24}-r_{20})-(\tau_{24}-\tau_{20}),\\
v_{\tau 31} &= (r_{31}-r_{30})-(\tau_{31}-\tau_{30}),\\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\
v_{\tau 34} &= (r_{34}-r_{30})-(\tau_{34}-\tau_{30}).
\end{aligned}$$

(16 Gleichungen)

Bei den Klammerausdrücken in den obigen Fehlergleichungen handelt es sich um Differenzen nahezu gleich großer Zahlen. Um bei den späteren Zahlenrechnungen mit einer geringen Stellenzahl auskommen zu können, führen wir andere, kleinere Größen ein. Wir gehen dabei von der halben Summe und der halben Differenz der Werte τ_{ik} und φ_{ik} aus, nämlich von

$$s_{ik} = 0{,}5\,(\tau_{ik}+\varphi_{ik}) \quad \text{und} \quad d_{ik} = 0{,}5\,(\tau_{ik}-\varphi_{ik}),$$

und erhalten, indem wir

$$r_{ik} = s_{ik} + u_{ik},$$

setzen, die Beziehungen

$$r_{ik}-\varphi_{ik} = u_{ik}+d_{ik}, \qquad r_{ik}-\tau_{ik} = u_{ik}-d_{ik}.$$

Dann bekommen die Fehlergleichungen folgende Form:

$$\begin{aligned}
v_{\varphi 10} &= (u_{10} - u_{00}) + (d_{10} - d_{00}) , & v_{\tau 01} &= (u_{01} - u_{00}) - (d_{01} - d_{00}) ,\\
v_{\varphi 20} &= (u_{20} - u_{00}) + (d_{20} - d_{00}) , & v_{\tau 02} &= (u_{02} - u_{00}) - (d_{02} - d_{00}) ,\\
v_{\varphi 30} &= (u_{30} - u_{00}) + (d_{30} - d_{00}) , & v_{\tau 03} &= (u_{03} - u_{00}) - (d_{03} - d_{00}) ,\\
&\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots & &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots\\
v_{\varphi 34} &= (u_{34} - u_{04}) + (d_{34} - d_{40}) , & v_{\tau 34} &= (u_{34} - u_{40}) - (d_{34} - d_{40}) .
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten-Matrizen für u_{ik} und d_{ik} der Fehlergleichungen sind in den Tabellen 1 und 2 wiedergegeben.

Tabelle 1. *Koeffizienten-Matrix* (g) *in den Fehlergleichungen* $(v) = (g) \cdot (u) + (h) \cdot (d)$.

	u_{00}	u_{01}	u_{02}	u_{03}	u_{04}	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{20}	u_{21}	u_{22}	u_{23}	u_{24}	u_{30}	u_{31}	u_{32}	u_{33}	u_{34}
$v_{\tau 01}$	−1	1																		
$v_{\tau 02}$	−1		1																	
$v_{\tau 03}$	−1			1																
$v_{\tau 04}$	−1				1															
$v_{\tau 11}$						−1	1													
$v_{\tau 12}$						−1		1												
$v_{\tau 13}$						−1			1											
$v_{\tau 14}$						−1				1										
$v_{\tau 21}$											−1	1								
$v_{\tau 22}$											−1		1							
$v_{\tau 23}$											−1			1						
$v_{\tau 24}$											−1				1					
$v_{\tau 31}$																−1	1			
$v_{\tau 32}$																−1		1		
$v_{\tau 33}$																−1			1	
$v_{\tau 34}$																−1				1
$v_{\varphi 10}$	−1					1														
$v_{\varphi 20}$	−1										1									
$v_{\varphi 30}$	−1															1				
$v_{\varphi 11}$		−1					1													
$v_{\varphi 21}$		−1										1								
$v_{\varphi 31}$		−1															1			
$v_{\varphi 12}$			−1					1												
$v_{\varphi 22}$			−1										1							
$v_{\varphi 32}$			−1															1		
$v_{\varphi 13}$				−1					1											
$v_{\varphi 23}$				−1										1						
$v_{\varphi 33}$				−1															1	
$v_{\varphi 14}$					−1					1										
$v_{\varphi 24}$					−1										1					
$v_{\varphi 34}$					−1															1

Wir haben nun nach *Gauß* zu fordern, daß Σv^2 ein Minimum wird. Wenn die Meßgenauigkeit bei der Bestimmung der Differenzen $\Delta\varphi$ und $\Delta\tau$ verschieden groß ist, muß man den Verbesserungen v_φ und v_τ verschiedenes „Gewicht" beilegen. Das Gewicht eines Fehlers ist dem Quadrat des mittleren Fehlers (der aus Messungen ermittelt oder auch geschätzt werden kann) umgekehrt proportional. Ordnen wir den v_τ-Werten das Gewicht 1 zu und sind μ_φ und μ_τ die mittleren Fehler bei der Messung von $\Delta\varphi$ bzw. $\Delta\tau$, so ergibt sich als Gewicht der v_φ-Werte

$$p = \mu_\tau^2 : \mu_\varphi^2 .$$

Wir haben demnach zu fordern

$$S = \Sigma\, p\, v_\varphi^2 + \Sigma\, v_\tau^2 = \text{Minimum} .$$

3. Aufstellung der Normalgleichungen. Die Fehlergleichungen enthalten einerseits die zu ermittelnden Zuschläge u, die an den mittleren Ordinaten s anzubringen sind, andererseits die bekannten halben Differenzen d zwischen je zwei zum gleichen Zustand gehörenden φ- und τ-Werten. Als Veränderliche der Minimumsaufgabe haben wir die u anzusehen. Aus der Be-

Tabelle 2. *Koeffizienten-Matrix (h) in den Fehlergleichungen.*

	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}
$v_{\tau 01}$	1	−1																		
$v_{\tau 02}$	1		−1																	
$v_{\tau 03}$	1			−1																
$v_{\tau 04}$	1				−1															
$v_{\tau 11}$						1	−1													
$v_{\tau 12}$						1		−1												
$v_{\tau 13}$						1			−1											
$v_{\tau 14}$						1				−1										
$v_{\tau 21}$											1	−1								
$v_{\tau 22}$											1		−1							
$v_{\tau 23}$											1			−1						
$v_{\tau 24}$											1				−1					
$v_{\tau 31}$																1	−1			
$v_{\tau 32}$																1		−1		
$v_{\tau 33}$																1			−1	
$v_{\tau 34}$																1				−1
$v_{\varphi 10}$	−1					1														
$v_{\varphi 20}$	−1										1									
$v_{\varphi 30}$	−1															1				
$v_{\varphi 11}$		−1					1													
$v_{\varphi 21}$		−1										1								
$v_{\varphi 31}$		−1															1			
$v_{\varphi 12}$			−1					1												
$v_{\varphi 22}$			−1										1							
$v_{\varphi 32}$			−1															1		
$v_{\varphi 13}$				−1					1											
$v_{\varphi 23}$				−1										1						
$v_{\varphi 33}$				−1															1	
$v_{\varphi 14}$					−1					1										
$v_{\varphi 24}$					−1										1					
$v_{\varphi 34}$					−1															1

dingung, daß die partiellen Ableitungen der Quadratsumme S nach allen u_{ik} gleich Null werden müssen, erhalten wir $a \cdot b$ sog. „Normalgleichungen" für die $a \cdot b$ Unbekannten u_{ik}.

Bei der partiellen Ableitung benutzt man zweckmäßig die Umformung

$$\frac{\partial S}{\partial u} = \frac{\partial(\Sigma\, p v_\varphi^2)}{\partial u} + \frac{\partial(\Sigma\, v_\tau^2)}{\partial u} = p \sum \frac{\partial v_\varphi^2}{\partial u} + \sum \frac{\partial v_\tau^2}{\partial u} = 2\left[\sum\left(p\, v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial u}\right) + \sum\left(v_\tau \frac{\partial v_\tau}{\partial u}\right)\right].$$

In den Tabellen 3 und 4 sind die Koeffizienten-Matrizen der Unbekannten u_{ik} und der Konstanten d_{ik} für alle $a \cdot b$ Normalgleichungen wiedergegeben. Das Bildungsgesetz in Abhängigkeit von a und b ist deutlich zu erkennen. Außerdem ist zu ersehen, daß die Summe aller Koeffizienten in jeder Spalte u_{ik} und d_{ik} gleich Null ist. Das bedeutet aber, daß nur $(a\,b - 1)$ Gleichungen von einander unabhängig sind. Denn wir können jede der $a \cdot b$ Gleichungen auch dadurch erhalten, daß wir alle anderen addieren. Wir haben somit gerade eine Gleichung zu wenig. Dies ist nicht verwunderlich, wenn man die u-Koeffizienten-Matrix der Fehlergleichungen betrachtet. In allen Fehlergleichungen kommen die Unbekannten u immer nur in Form von Differenzen vor, niemals in anderer Kombination. Da die Normalgleichungen lineare Kombinationen der Fehlergleichungen sind (die partiellen Ableitungen liefern nur Konstante), liefern auch die Normalgleichungen nur Bedingungen für die Differenzen je zweier Unbekannten, niemals für die Unbekannten selbst. Wir müssen daher noch eine Bedingung hinzufügen, durch die die Höhenlage des ausgeglichenen Punkthaufens festgelegt wird. Wir wählen die Bedingung $\Sigma\, u = 0$, die besagt, daß der Schwerpunkt des ausgeglichenen Punkthaufens r_{ik} mit dem Schwerpunkt der Mittelwerte s_{ik} der φ- und τ-Werte zusammenfallen soll. Damit schaffen wir gleichzeitig die Voraussetzung dafür, daß auch $\Sigma\, u^2$ ein Minimum wird.

Tabelle 3. *Koeffizienten-Matrix (l) in den Normalgleichungen* $(l)\cdot(u) + (n)\cdot(d) = 0$.

	u_{00}	u_{01}	u_{02}	u_{03}	u_{04}	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{20}	u_{21}	u_{22}	u_{23}	u_{24}	u_{30}	u_{31}	u_{32}	u_{33}	u_{34}
00	$a-1$ $+p(b-1)$	$-p$	$-p$	$-p$	$-p$	-1					-1					-1				
01	$-p$	$p+a-1$					-1					-1					-1			
02	$-p$		$p+a-1$					-1					-1					-1		
03	$-p$			$p+a-1$					-1					-1					-1	
04	$-p$				$p+a-1$					-1					-1					-1
10	-1					$1+$ $p(b-1)$	$-p$	$-p$	$-p$	$-p$										
11		-1				$-p$	$p+1$													
12			-1			$-p$		$p+1$												
13				-1		$-p$			$p+1$											
14					-1	$-p$				$p+1$										
20	-1										$1+$ $p(b-1)$	$-p$	$-p$	$-p$	$-p$					
21		-1									$-p$	$p+1$								
22			-1								$-p$		$p+1$							
23				-1							$-p$			$p+1$						
24					-1						$-p$				$p+1$					
30	-1															$1+$ $p(b-1)$	$-p$	$-p$	$-p$	$-p$
31		-1														$-p$	$p+1$			
32			-1													$-p$		$p+1$		
33				-1												$-p$			$p+1$	
34					-1											$-p$				$p+1$

Tabelle 4. *Koeffizienten-Matrix (n) in den Normalgleichungen.*

	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}
00	$a-1$ $-p(b-1)$	p	p	p	p	-1					-1					-1				
01	p	$-p+a-1$					-1					-1					-1			
02	p		$-p+a-1$					-1					-1					-1		
03	p			$-p+a-1$					-1					-1					-1	
04	p				$-p+a-1$					-1					-1					-1
10	-1					$1-$ $p(b-1)$	p	p	p	p										
11		-1				p	$1-p$													
12			-1			p		$1-p$												
13				-1		p			$1-p$											
14					-1	p				$1-p$										
20	-1										$1-$ $p(b-1)$	p	p	p	p					
21		-1									p	$1-p$								
22			-1								p		$1-p$							
23				-1							p			$1-p$						
24					-1						p				$1-p$					
30	-1															$1-$ $p(b-1)$	p	p	p	p
31		-1														p	$1-p$			
32			-1													p		$1-p$		
33				-1												p			$1-p$	
34					-1											p				$1-p$

4. Allgemeine Auflösung der Normalgleichungen. Bei Ausgleichsrechnungen ist es üblich, das System der Normalgleichungen nach dem Einsetzen der Zahlenwerte für p und alle d von Fall zu Fall numerisch aufzulösen. Da man es bei nur drei φ- und drei τ-Kurven schon mit 9 Gleichungen, bei fünf φ- und vier τ-Kurven aber mit 20 Gleichungen zu tun hat, ist dies eine ziemlich langwierige und Übung voraussetzende Arbeit. Um diese immer wiederkehrenden Rechnungen zu vermeiden, wurde das System von $a \cdot b$ Gleichungen generell algebraisch aufgelöst. Im folgenden werden die Ergebnisse mitgeteilt. Von einer auch nur auszugsweisen Wiedergabe der durchaus elementaren, aber ziemlich umfangreichen Berechnungen muß aus Raumgründen abgesehen werden.

Die an den Mittelwerten s_{ik} anzubringenden Zuschläge u_{ik}, durch die das Netz entsprechend unseren Forderungen ausgeglichen wird, sind, wie zu erwarten war, lineare Funktionen der halben Differenzen d_{ik}, und zwar trägt im allgemeinsten Fall jede dieser halben Differenzen nach Maßgabe eines Koeffizienten c zu jedem Zuschlag u etwas bei. An dem Mittelwert $s_{f,t}$, der der Frequenz f und der Temperatur t zugeordnet ist, ist ein Zuschlag

$$u_{f,t} = \sum_{i=0;\,k=0}^{a-1;\,b-1} \left(c_{ik}^{(f,t)}\, d_{ik} \right)$$

anzubringen. Die Koeffizienten $c_{ik}^{(f,t)}$ sind algebraische Funktionen von a, b, und p. Das zweite Indexpaar f, t weist darauf hin, daß sich c nicht nur nach der jeweiligen Differenz d_{ik} richtet, sondern auch nach der Verbesserung $u_{f,t}$, für die es gelten soll. Die Mannigfaltigkeit ist jedoch keineswegs so groß, wie es zunächst scheint. Unter den $a \cdot b$ Koeffizienten c gibt es im Höchstfall 16 der Formel und dem Zahlenwert nach verschiedene. Die Formeln für die 16 Koeffizienten, die zur leichteren Unterscheidung mit Buchstaben des großen Alphabetes (A bis R, unter Auslassung von O) bezeichnet werden, sind in Tabelle 5 zusammengestellt. Die Zahlenwerte von $A \ldots R$ sind für einige Werte von a, b, und p der Tabelle 6 zu entnehmen.

Tabelle 5. *Formeln für die Koeffizienten $A \ldots R$.*

$$V A = -(p+1)(b\,p+1)(a+p)[(1+a\,b)(a-b\,p)+2\,a\,b\,(p-1)],$$
$$V B = -(p+1)(b\,p+1)(a+p)(2\,a\,b\,p+a-b\,p),$$
$$V C = -(p+1)(b\,p+1)[a\,b\,(a+b\,p)(a-p-2)+2\,a\,b\,p\,(p+1)+(a+p)(a-b\,p)],$$
$$V D = -(p+1)(b\,p+1)[2\,a\,b\,p\,(p+1)+(a+p)(a-b\,p)],$$
$$V E = +(p+1)(b\,p+1)(a+p)(2\,a\,b-a+b\,p),$$
$$V F = -(p+1)(b\,p+1)(a+p)(a-b\,p),$$
$$V G = +(p+1)(b\,p+1)[2\,a\,b\,(a+b\,p)-b\,p\,(a-p)-a\,(a+p)],$$
$$V H = -(p+1)(b\,p+1)[(a+p)(a-b\,p)+2\,a\,b\,p],$$
$$V J = +(p+1)(a+p)[a\,b\,(a+b\,p)(b\,p-1)-b\,p\,(a+b\,p)(2\,a-1)+2\,a\,b-a+b\,p],$$
$$V K = -(p+1)(a+p)[b\,p\,(a+b\,p)(2\,a-1)+a-b\,p],$$
$$V L = +(b\,p+1)[a\,b\,(p-1)(a+p)(a+b\,p)-(p+1)(a-b\,p)(a+p)+2\,a\,b\,(a+b\,p-p)] - 2\,a\,b\,p^2\,(a+p)(a+b\,p-1),$$
$$V M = -2\,a\,b\,p\,[b\,p+1+p\,(a+p)(a+b\,p-1)]-(p+1)(b\,p+1)(a+p)(a-b\,p),$$
$$V N = +(p+1)(a+p)[2\,a\,(b-1)+(b\,p+1)(a+b\,p)],$$
$$V P = -(p+1)(a+p)[(b\,p+1)(a-b\,p)-2\,a\,b\,p],$$
$$V Q = +2\,a\,b\,[(b\,p+1)(a+b\,p-p)+p^2\,(a+p)]-(p+1)(b\,p+1)(a+p)(a-b\,p),$$
$$V R = -2\,a\,b\,p\,[b\,p+1-p\,(a+p)]-(p+1)(b\,p+1)(a+p)(a-b\,p).$$
$$V = a\,b\,(p+1)(b\,p+1)(a+p)(a+b\,p).$$

5. Die Struktur der d_{ik}-Koeffizienten-Matrix. Die Zuordnung der 16 Koeffizienten $A \ldots R$ zu den halben Differenzen d_{ik} und den zu berechnenden Zuschlägen u zeigt die Tabelle 7, die für den Fall von $a = 5$ Meßfrequenzen und $b = 6$ Meßtemperaturen aufgestellt ist. Die Koeffizienten-Matrix ist quadratisch und symmetrisch zur Hauptdiagonale. Sie weist außerdem

einige Gesetzmäßigkeiten des Aufbaus auf, deren Kenntnis für die Umstellung auf andere Werte von a und b von Wichtigkeit ist. Sie zerfällt nämlich in a^2 zum Teil gleiche Teilquadrate von der Seitenlänge b, die ebenfalls symmetrisch zur Hauptdiagonale aufgebaut sind. Bei der gesamten Matrix wie bei den Teilquadraten kann man einige Teilflächen unterscheiden, die in ihrem Koeffizienten-Inhalt einheitlich aufgebaut sind. Diese sind: ein quadratisches Eckfeld (links oben), ein Streifen in der Hauptdiagonale, zwei Randleisten (oben und links) sowie zwei Dreieckflächen. Dabei hat man als Struktureinheit ein Quadrat anzusehen, das bei der gesamten Matrix die Kantenlänge b, beim Teilquadrat die Kantenlänge 1 hat.

6. Praktische Durchführung der Ausgleichsrechnung. Gegeben seien aus Messungen[1] der Frequenzgang der Meßgröße $m = F_1(f)$ bei b konstanten Temperaturen $t_0 \ldots t_{b-1}$ (b Kurven des φ-Diagramms, aus denen bei den Abszissen $f_0 \ldots f_{a-1}$ insgesamt $a \cdot b$ Meßwerte φ_{ik} entnommen werden), der Temperaturgang der Meßgröße $m = F_2(t)$ bei a konstanten Frequenzen $f_0 \ldots f_{a-1}$ (a Kurven des τ-Diagramms, aus denen bei den Abszissen $t_0 \ldots t_{b-1}$ insgesamt $a \cdot b$ Meßwerte τ_{ik} entnommen werden).

Ferner sei (aus Messungen oder Schätzungen) die mittleren Fehler μ_φ und μ_τ bei der Ermittlung des Frequenzganges und des Temperaturgangs bekannt, woraus $p = \mu_\tau^2 : \mu_\varphi^2$ errechnet werden kann. Man geht dann wie folgt vor: Aus den $2 \times a \cdot b$ Meßwerten φ_{ik} und τ_{ik} werden die $a \cdot b$ Mittelwerte

$$s_{ik} = 0{,}5\,(\tau_{ik} + \varphi_{ik})$$

und ebensoviele Differenzen

$$d_{ik} = 0{,}5\,(\tau_{ik} - \varphi_{ik})$$

berechnet.

Dann stellt man an Hand der Regeln des Abschnittes **5** und der Beispielmatrix Tabelle 7 die d-Koeffizienten-Matrix für die betreffenden Werte von a und b auf, und zwar zunächst nur mit Buchstaben ($A \ldots R$). Nunmehr berechnet man diese Koeffizienten $A \ldots R$ entweder aus der Tabelle 7 (aus den Zahlenwerten

$$U \cdot (A \ldots R) \text{ und } U)$$

oder aus der Formelzusammenstellung Tabelle 5.

Die einzelnen Summanden, aus denen sich die $u_{f,t}$ zusammensetzen, ergeben sich dann aus der Multiplikation der Zahlenwerte der in

[1] Entsprechend dem oben gewählten Beispiel sind als Einflußgrößen wieder Frequenz und Temperatur gewählt.

Tabelle 6. *Zahlenwerte der Koeffizienten A ... R.*

p a b	1 3 2	1 4 2	1 2 3	1 3 3	1 4 3	1 2 4	1 3 4	1 4 4	1 5 4	1 3 5	1 4 5	0,25 5 5	0,25 4 4	0,25 3 3	0,25 2 3	0,25 3 2	4 5 5	4 4 4	4 3 3	4 2 3	4 3 2	1 6 5	1 5 5
$U \cdot A$	— 7	—27	7	0	— 65	27	65	0	— 63	128	63	—3024	—459	—364	3	—17	3034	459	364	17	— 3	— 217	0
$U \cdot B$	—13	—27	—11	— 4	—125	—21	—115	— 5	—123	—112	—117	— 819	—187	—273	— 51	—11	—2331	493	—637	—19	—129	— 427	— 6
$U \cdot C$	— 7	—27	3	— 2	—137	11	— 55	— 6	—223	— 52	—153	—4464	—651	—476	—13	—17	— 336	51	156	13	— 3	—1117	—12
$U \cdot D$	—	—	— 7	— 2	53	—13	— 55	— 2	— 43	— 52	— 45	— 339	— 91	— 161	— 35	—	—1211	—289	—429	—15		— 127	— 2
$U \cdot E$	11	21	13	4	115	27	125	5	117	128	123	2331	493	637	129	19	819	187	273	11	51	413	6
$U \cdot F$	— 1	— 3	1	0	— 5	3	5	0	— 3	8	3	— 189	— 51	— 91	— 15	— 5	189	51	91	5	15	— 7	0
$U \cdot G$	11	21	17	5	139	43	185	7	157	218	195	2691	557	693	145	19	1659	323	377	15	51	593	9
$U \cdot H$	—	—	— 3	— 1	— 29	— 5	— 25	— 1	— 23	— 22	— 21	— 309	— 83	— 147	— 31	—	— 91	— 17	—13	1		— 67	— 1
$U \cdot J$	— 3	—11	7	2	55	27	137	6	153	208	223	336	51	156	3	—13	4464	651	476	17	13	903	12
$U \cdot K$	—17	—43	—11	— 5	—185	—21	—139	— 7	—195	—132	—157	—1659	—323	—377	— 51	—15	—2691	—557	—693	—19	—145	— 707	— 9
$U \cdot L$	— 3	—11	3	0	— 23	11	23	0	— 19	43	19	—2904	—435	—340	—13	—13	—2904	435	340	13	13	— 57	0
$U \cdot M$	—	—	— 7	— 3	—107	—13	— 82	— 4	—109	— 77	— 89	— 579	—131	— 193	— 35	—	—2171	—449	—557	— 15	— 51	—387	— 5
$U \cdot N$	7	13		2	55		53	2	45	48	43	1211	289	429		15	339	91	161	35		133	2
$U \cdot P$	3	5		1	25		29	1	21	28	23	91	17	13		— 1	309	83	147	31		63	1
$U \cdot Q$	7	13		3	82		107	4	89	123	109	2171	449	557		15	579	131	193	35		328	5
$U \cdot R$	—	—		0	— 2		2	0	— 1	3	1	— 229	— 63	—115		—	229	77	115	—		— 2	0
U	30	72	30	12	420	72	420	20	510	480	510	7875	1360	1365	198	42	7875	1360	1365	198	42	2310	30

der Zeile $u_{f,t}$ stehenden Koeffizienten $A \ldots R$ und des darüber im Kopf der Tabelle genannten d_{ik}. Die Summanden sind dann unter Beachtung ihres Vorzeichens zu addieren.

Als Kontrolle für die richtige Berechnung der Koeffizienten $A \ldots R$ kann dienen, daß für lauter gleiche d (z. B. $= 1$) sämtliche Zuschläge u verschwinden müssen.

Tabelle 7.

	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	d_{05}	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	d_{25}	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	d_{35}	d_{40}	d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}	d_{45}
u_{00}	A	B	B	B	B	B	E	F	F	F	F	F	E	F	F	F	F	F	E	F	F	F	F	F	E	F	F	F	F	F
u_{01}	B	C	D	D	D	D	F	G	H	H	H	H	F	G	H	H	H	H	F	G	H	H	H	H	F	G	H	H	H	H
u_{02}	B	D	C	D	D	D	F	H	G	H	H	H	F	H	G	H	H	H	F	H	G	H	H	H	F	H	G	H	H	H
u_{03}	B	D	D	C	D	D	F	H	H	G	H	H	F	H	H	G	H	H	F	H	H	G	H	H	F	H	H	G	H	H
u_{04}	B	D	D	D	C	D	F	H	H	H	G	H	F	H	H	H	G	H	F	H	H	H	G	H	F	H	H	H	G	H
u_{05}	B	D	D	D	D	C	F	H	H	H	H	G	F	H	H	H	H	G	F	H	H	H	H	G	F	H	H	H	H	G
u_{10}	E	F	F	F	F	F	J	K	K	K	K	K	N	P	P	P	P	P	N	P	P	P	P	P	N	P	P	P	P	P
u_{11}	F	G	H	H	H	H	K	L	M	M	M	M	P	Q	R	R	R	R	P	Q	R	R	R	R	P	Q	R	R	R	R
u_{12}	F	H	G	H	H	H	K	M	L	M	M	M	P	R	Q	R	R	R	P	R	Q	R	R	R	P	R	Q	R	R	R
u_{13}	F	H	H	G	H	H	K	M	M	L	M	M	P	R	R	Q	R	R	P	R	R	Q	R	R	P	R	R	Q	R	R
u_{14}	F	H	H	H	G	H	K	M	M	M	L	M	P	R	R	R	Q	R	P	R	R	R	Q	R	P	R	R	R	Q	R
u_{15}	F	H	H	H	H	G	K	M	M	M	M	L	P	R	R	R	R	Q	P	R	R	R	R	Q	P	R	R	R	R	Q
u_{20}	E	F	F	F	F	F	N	P	P	P	P	P	J	K	K	K	K	K	N	P	P	P	P	P	N	P	P	P	P	P
u_{21}	F	G	H	H	H	H	P	Q	R	R	R	R	K	L	M	M	M	M	P	Q	R	R	R	R	P	Q	R	R	R	R
u_{22}	F	H	G	H	H	H	P	R	Q	R	R	R	K	M	L	M	M	M	P	R	Q	R	R	R	P	R	Q	R	R	R
u_{23}	F	H	H	G	H	H	P	R	R	Q	R	R	K	M	M	L	M	M	P	R	R	Q	R	R	P	R	R	Q	R	R
u_{24}	F	H	H	H	G	H	P	R	R	R	Q	R	K	M	M	M	L	M	P	R	R	R	Q	R	P	R	R	R	Q	R
u_{25}	F	H	H	H	H	G	P	R	R	R	R	Q	K	M	M	M	M	L	P	R	R	R	R	Q	P	R	R	R	R	Q
u_{30}	E	F	F	F	F	F	N	P	P	P	P	P	N	P	P	P	P	P	J	K	K	K	K	K	N	P	P	P	P	P
u_{31}	F	G	H	H	H	H	P	Q	R	R	R	R	P	Q	R	R	R	R	K	L	M	M	M	M	P	Q	R	R	R	R
u_{32}	F	H	G	H	H	H	P	R	Q	R	R	R	P	R	Q	R	R	R	K	M	L	M	M	M	P	R	Q	R	R	R
u_{33}	F	H	H	G	H	H	P	R	R	Q	R	R	P	R	R	Q	R	R	K	M	M	L	M	M	P	R	R	Q	R	R
u_{34}	F	H	H	H	G	H	P	R	R	R	Q	R	P	R	R	R	Q	R	K	M	M	M	L	M	P	R	R	R	Q	R
u_{35}	F	H	H	H	H	G	P	R	R	R	R	Q	P	R	R	R	R	Q	K	M	M	M	M	L	P	R	R	R	R	Q
u_{40}	E	F	F	F	F	F	N	P	P	P	P	P	N	P	P	P	P	P	N	P	P	P	P	P	J	K	K	K	K	K
u_{41}	F	G	H	H	H	H	P	Q	R	R	R	R	P	Q	R	R	R	R	P	Q	R	R	R	R	K	L	M	M	M	M
u_{42}	F	H	G	H	H	H	P	R	Q	R	R	R	P	R	Q	R	R	R	P	R	Q	R	R	R	K	M	L	M	M	M
u_{43}	F	H	H	G	H	H	P	R	R	Q	R	R	P	R	R	Q	R	R	P	R	R	Q	R	R	K	M	M	L	M	M
u_{44}	F	H	H	H	G	H	P	R	R	R	Q	R	P	R	R	R	Q	R	P	R	R	R	Q	R	K	M	M	M	L	M
u_{45}	F	H	H	H	H	G	P	R	R	R	R	Q	P	R	R	R	R	Q	P	R	R	R	R	Q	K	M	M	M	M	L

(Eingegangen am 3. September 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Ing. *Heinz Freytag*, Forsbach bei Köln, Feldstr. 31.

Beitrag zur Potentialströmung durch radiale Schaufelgitter.

Von W.-H. Isay.

1. Einleitung. In neuerer Zeit erfolgt die Berechnung der Potentialströmung durch axiale Schaufelgitter immer mehr durch die Anwendung der direkten Singularitätenmethode, indem die von *Birnbaum* [1] seinerzeit für den einzelnen Tragflügel geschaffene Theorie der tragenden Wirbelfläche auf ebene Schaufelgitter ausgedehnt wurde. Diese Theorie ist sehr übersichtlich, und es ist möglich, mit ihr Einzelgitter sowie Gitterstufen mit beliebigen in der Praxis vorkommenden Profilformen zu behandeln [2]; ferner kann sie in beschränktem Umfange auch bei kompressiblen Strömungen angewendet werden [3, 5].

Es ist somit naheliegend, diese Theorie auch zur Berechnung der Potentialströmung durch radiale Schaufelgitter (Schaufelsterne) heranzuziehen. Dabei wird es sich zeigen, daß alle in der Arbeit I für axiale Gitter gewonnenen Ergebnisse auch auf Radialgitter übertragen werden können.

2. Das Einzelgitter mit linienhaften Profilen. Wir betrachten in der komplexen z-Ebene ein Radialgitter mit N linienhaften („unendlich dünnen") Profilen. Wir wollen annehmen, es sei ein Laufradgitter (Abb. 1). Die Strömung durch das mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierende Schaufelgitter ist nur im Absolutsystem eine Potentialströmung, während die Relativströmung einen konstanten Wirbel ($-\omega$) besitzt [4]. Wir beziehen uns daher auf das Absolutsystem. Dabei denken wir uns die Strömung durch das Gitter entstanden durch Überlagerung der Strömung (u_γ, v_γ), die von den Zirkulationsverteilungen auf den Profilkonturen induziert wird und der Strömung (u_0, v_0) einer im Mittelpunkt des Gitters (Nullpunkt) angebrachten Quelle (oder Senke) Q_0 und einer Zirkulation Γ_0 (innere Zirkulation). Es ist also [6]

$$c_0(z) = u_0 - i\,v_0 = \frac{1}{2\pi}(Q_0 + i\,\Gamma_0)\frac{1}{z}\,. \tag{1}$$

Nun ist das von N kreisförmig in den Punkten $\zeta, \zeta\, e^{i\frac{2\pi}{N}}, \ldots \zeta\, e^{i\,2\pi\frac{N-1}{N}}$ angeordneten Wirbelelementen $\gamma\,ds$ induzierte Strömungsfeld im Punkte z gegeben durch [7]

$$dc_\gamma = du_\gamma - i\,dv_\gamma = \frac{i}{2\pi}\,\gamma\,ds\frac{N\,z^{N-1}}{z^N - \zeta^N}\,.$$

Damit ist das resultierende von der auf der Profilkontur angebrachten Zirkulationsverteilung $\gamma(s)$ (s = Bogenlänge) induzierte Geschwindigkeitsfeld

$$c_\gamma(z) = u_\gamma - i\,v_\gamma = \frac{i}{2\pi}\int \gamma(s)\frac{N\,z^{N-1}}{z^N - \zeta^N}\,ds\,. \tag{2}$$

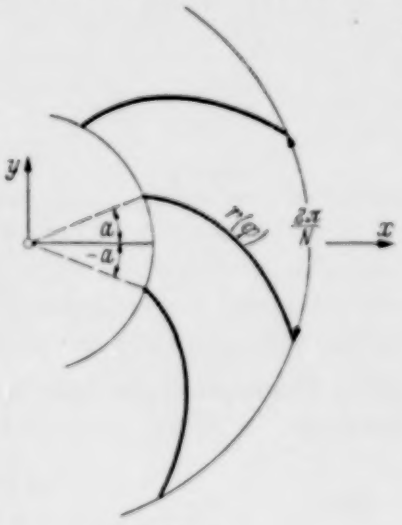

Abb. 1.

Wir setzen $z = x + i\,y = r\,e^{i\varphi}$ und $\zeta = \xi + i\,\eta = \varrho\,e^{i\psi}$ und geben die Kurve der Schaufelkontur in der Form $r(\varphi)$ bzw. $\varrho(\psi)$ vor. Es sei $r(\varphi)$ ein Polynom bzw. ein Fourierpolynom in φ, jedenfalls jedoch eine eindeutige Funktion von φ.

Da wir γ nur auf der Kurve $\varrho(\psi)$ anbringen, können wir statt $\gamma(s)$ schreiben $\gamma(\psi)$. Ferner ist

$$ds = \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}\,d\psi\,.$$

---

[1] *W. Birnbaum* u. *W. Ackermann*, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923) S. 290.

[2] *W. H. Isay*, Beitrag zur Potentialströmung durch axiale Schaufelgitter. Diss. T. U. Berlin 1952, Z. angew. Math. Mech. 33 (1953) S. 397, sowie die hier verzeichnete Literatur. Diese Arbeit wird als Arbeit I bezeichnet.

[3] *G. V. R. Rao*, Journ. of the Aeronautical Sciences 1953 S. 217.

[4] Vgl. z. B. *W. Spannhake*, Hydraulische Probleme, S. 180, Berlin VDI 1926.

[5] *P. F. Byrd* u. *M. T. Huggins*, Ing.-Arch. 21 (1953) S. 191.

[6] Allgemein bedeuten hier u und v die x- und y-Komponente der Absolutgeschwindigkeit c ($c^2 = u^2 + v^2$).

[7] Vgl. z. B. *W. Müller*, Mathematische Strömungslehre, S. 97, Berlin 1928.

Damit ergeben sich die x- und die y-Komponente des von der Zirkulationsverteilung $\gamma(\psi)$ (die auf der Kontur $\varrho(\psi)$ angebracht ist) induzierten Geschwindigkeitsfeldes zu

$$u_\gamma(r,\varphi) = \frac{N}{2\pi r}\int_{-a}^{a}\gamma(\psi)\frac{\left(\frac{\varrho(\psi)}{r}\right)^N \sin(N\varphi - N\psi - \varphi) + \sin\varphi}{1 - 2\left(\frac{\varrho(\psi)}{r}\right)^N \cos N(\varphi-\psi) + \left(\frac{\varrho(\psi)}{r}\right)^{2N}}\sqrt{\varrho^2+\varrho'^2}\,d\psi\,, \tag{3}$$

$$v_\gamma(r,\varphi) = \frac{N}{2\pi r}\int_{-a}^{a}\gamma(\psi)\frac{\left(\frac{\varrho(\psi)}{r}\right)^N \cos(N\varphi - N\psi - \varphi) - \cos\varphi}{1 - 2\left(\frac{\varrho(\psi)}{r}\right)^N \cos N(\varphi-\psi) + \left(\frac{\varrho(\psi)}{r}\right)^{2N}}\sqrt{\varrho^2+\varrho'^2}\,d\psi\,. \tag{4}$$

Ferner ist nach (1)

$$u_0(r,\varphi) = \frac{Q_0}{2\pi}\frac{\cos\varphi}{r} + \frac{\Gamma_0}{2\pi}\frac{\sin\varphi}{r}\,, \tag{5}$$

$$v_0(r,\varphi) = \frac{Q_0}{2\pi}\frac{\sin\varphi}{r} - \frac{\Gamma_0}{2\pi}\frac{\cos\varphi}{r}\,. \tag{6}$$

Es ist jetzt die folgende Aufgabe gestellt: Auf der Schaufelkontur $r(\varphi)$ soll eine Zirkulationsverteilung $\gamma(\varphi)$ so bestimmt werden, daß $r(\varphi)$ Stromlinie der Relativströmung wird.

Da wir uns auf das Absolutsystem beziehen, bedeutet das für unser Problem die folgende Randbedingung (vgl. *Spannhake*): An jeder Stelle der Profilkontur muß die Normalkomponente der Geschwindigkeit $c_0 + c_\gamma$ übereinstimmen mit der Geschwindigkeitskomponente des Schaufelelementes normal zu diesem selbst. Ist

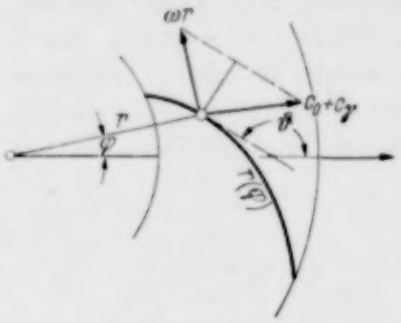

Abb. 2.

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi}{r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi}$$

der Anstieg der Profilkontur, so führt die Randbedingung auf die Relation (Abb. 2)

$$\omega r\cos(\vartheta-\varphi) = (v_0 + v_\gamma)\cos\vartheta - (u_0 + u_\gamma)\sin\vartheta\,,$$

oder

$$\begin{aligned}\omega r(\varphi)\cos\varphi\,\{r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi\} + \omega\, r(\varphi)\sin\varphi\,\{r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi\}\\ = [v_0(r(\varphi),\varphi) + v_\gamma(r(\varphi),\varphi)]\,[r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi]\\ - [u_0(r(\varphi),\varphi) + u_\gamma(r(\varphi)\varphi)]\,[r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi]\,.\end{aligned}$$

Diese Relation stellt eine Integralgleichung für $\gamma(\psi)$ dar. Sie lautet, wenn wir noch zur Abkürzung

$$\gamma(\psi)\sqrt{\varrho^2+\varrho'^2} = \sigma(\psi)$$

setzen,

$$\left.\begin{aligned}&-\omega\, r(\varphi)\, r'(\varphi) - \frac{\Gamma_0}{2\pi}\frac{r'(\varphi)}{r(\varphi)} - \frac{Q_0}{2\pi}\\ &= \frac{N}{2\pi}\int_{-a}^{a}\sigma(\psi)\frac{\frac{r'(\varphi)}{r(\varphi)} + \left(\frac{\varrho(\psi)}{r(\varphi)}\right)^N \sin N(\varphi-\psi) - \frac{r'(\varphi)}{r(\varphi)}\left(\frac{\varrho(\psi)}{r(\varphi)}\right)^N \cos N(\varphi-\psi)}{1 - 2\left(\frac{\varrho(\psi)}{r(\varphi)}\right)^N \cos N(\varphi-\psi) + \left(\frac{\varrho(\psi)}{r(\varphi)}\right)^{2N}}\,d\psi\,.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Dies ist die Integralgleichung unseres Problems. Die einzige Singularität ihres Kernes liegt an der Stelle $\varphi = \psi$.

Bezeichnen wir den Kern von (7) mit $K(\varphi,\psi)$, so wird

$$\lim_{\varphi\to\psi}(\varphi-\psi)\,K(\varphi,\psi) = \frac{N}{2\pi}\lim_{\varphi\to\psi}\frac{\frac{r'}{r}\frac{r^N-\varrho^N}{\varphi-\psi}r + r^{2N}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^N N}{\left(\frac{r^N-\varrho^N}{\varphi-\psi}\right)^2 + r^N\varrho^N N^2} = \frac{1}{2\pi}\,.$$

Demnach können wir $K(\varphi, \psi)$ auf die Form

$$K(\varphi, \psi) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{\varphi - \psi} + H(\varphi, \psi)\right]$$

bringen, wobei $H(\varphi, \psi)$ im ganzen Bereich in beiden Variablen stetig ist. Speziell ergibt sich, wenn man den Grenzübergang durchführt,

$$H(\varphi, \varphi) = \frac{1}{2}\,\frac{N\frac{r'}{r} + (N-1)\left(\frac{r'}{r}\right)^3 + \frac{r'\,r''}{r^2}}{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}\,. \tag{8}$$

Mit

$$f(\varphi) = -2\,\omega\,r(\varphi)\,r'(\varphi) - \frac{\Gamma_0}{\pi}\,\frac{r'(\varphi)}{r(\varphi)} - \frac{Q_0}{\pi}$$

nimmt (7) die Form an

$$f(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \sigma(\psi)\left[\frac{1}{\varphi - \psi} + H(\varphi, \psi)\right] d\psi\,. \tag{9}$$

Die Auflösung dieser Integralgleichung erfolgt nach der von *W. Schmeidler* in seinem Buch für Integralgleichungen erster Art angegebenen Methode der Kernmatrix und wurde bereits in der Arbeit I behandelt, so daß wir hier nicht mehr darauf eingehen[1]. Die in der Lösung $\sigma(\psi)$ enthaltene freie Konstante

$$\Gamma = \int_{-a}^{a} \sigma(\psi)\,d\psi = \int_{-a}^{a} \gamma(\psi)\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}\,d\psi$$

wird durch die Abflußbedingung

$$\gamma(-a) = 0$$

bestimmt. Die sogenannte innere Zirkulation Γ_0 kann durch die Bedingung des stoßfreien Eintrittes

$$\gamma(a) = 0$$

festgelegt werden. Die äußere Zirkulation des Gitters ist dann

$$\Gamma_0 + N\Gamma\,.$$

Damit läßt sich aus (3), (4), (5), (6) das Geschwindigkeitsfeld der Gitterströmung in jedem Punkt (r, φ) der Gitterebene berechnen.

Für die Berechnung der Druckverteilung am Profil (hier natürlich nach der *Bernoulli*schen Gleichung im Relativsystem) und des Drucksprunges von der Druckseite zur Saugseite des Profiles, muß man noch die resultierende Relativgeschwindigkeit w an diesen beiden Seiten ermitteln. Es ist

$$w^2 = (u_0 + u_\gamma + \omega\,r\sin\varphi \pm \Delta u_\gamma)^2 + (v_0 + v_\gamma - \omega\,r\cos\varphi \pm \Delta v_\gamma)^2\,,$$

und zwar $(+)$ an der Saugseite und $(-)$ an der Druckseite. Dabei ist

$$\Delta u_\gamma = -\frac{\gamma}{2}\,\frac{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}{\sqrt{r^2 + r'^2}}\,, \qquad \Delta v_\gamma = -\frac{\gamma}{2}\,\frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{\sqrt{r^2 + r'^2}}\,.$$

Liegt nicht ein Laufradgitter sondern ein Leitradgitter vor, so behalten alle Formeln unverändert ihre Gültigkeit, sofern nur überall $\omega = 0$ gesetzt wird.

3. Das Einzelgitter mit endlich dicken Profilen. Wir betrachten ein einzelnes Schaufelgitter mit endlich dicken Profilen (Abb. 3). Es möge sich wieder um ein Laufradgitter handeln. Der Fall des Leitrades läßt sich dann sofort entnehmen, indem man $\omega = 0$ setzt. Die Kurve der Profilkontur, auf der wir die Zirkulationsverteilung anbringen, sei in diesem Fall in der Parameterdarstellung

$$\varphi(t) = -a\cos t\,, \qquad r(t) = \sum_{\nu=-M}^{M} c_\nu\,e^{i\nu t} \qquad (-\pi \le t \le \pi)$$

[1] Der singuläre Hauptteil des Kernes ist wohlbekannt. (Vgl. *W. Schmeidler*, Integralgleichungen I, Leipzig 1950, S. 51). Der stetige Zusatzkern wird durch ein *Fourier*polynom ($\varphi = -a\cos t$ gesetzt) approximiert, so daß die Berechnung und Auswertung der Kernmatrix möglich ist.

gegeben. Die c_ν hängen von der speziellen vorliegenden Form des Profils ab. Bei Profilen mit spitzer Hinterkante (Abb. 3) muß $\dot r(0) = 0$ sein. Bei abgerundeter Hinterkante ist $\dot r(0) \neq 0$. Im übrigen gelten die Betrachtungen von Ziff. 2 sinngemäß auch hier, insbesondere können wir die Formulierung der Randbedingung wörtlich übernehmen. Mit

$$\operatorname{tg}\vartheta(t) = \frac{\dot r(t)\sin\varphi(t) + r(t)\,\dot\varphi(t)\cos\varphi(t)}{\dot r(t)\cos\varphi(t) - r(t)\,\dot\varphi(t)\sin\varphi(t)}$$

als Anstieg der Profilkontur lautet sie

$$\begin{aligned}\omega\, r(t)\cos\big(\vartheta(t) - \varphi(t)\big) &= \big[v_0\big(r(t),\varphi(t)\big) + v_\nu\big(r(t),\varphi(t)\big)\big]\cos\vartheta(t)\\ &\quad - \big[u_0\big(r(t),\varphi(t)\big) + u_\nu\big(r(t),\varphi(t)\big)\big]\sin\vartheta(t)\,.\end{aligned}$$

Indem wir

$$u_\nu(r,\varphi) = \frac{N}{2\pi r}\int_{-\pi}^{\pi}\gamma(\tau)\,\frac{\left(\frac{\varrho(\tau)}{r}\right)^N\sin\left(N\varphi - N\psi(\tau) - \varphi\right) + \sin\varphi}{1 - 2\left(\frac{\varrho(\tau)}{r}\right)^N\cos N(\varphi-\psi(\tau)) + \left(\frac{\varrho(\tau)}{r}\right)^{2N}}\sqrt{\varrho^2\dot\psi^2 + \dot\varrho^2}\,d\tau\,, \tag{10}$$

$$v_\nu(r,\varphi) = \frac{N}{2\pi r}\int_{-\pi}^{\pi}\gamma(\tau)\,\frac{\left(\frac{\varrho(\tau)}{r}\right)^N\cos\left(N\varphi - N\psi(\tau) - \varphi\right) - \cos\varphi}{1 - 2\left(\frac{\varrho(\tau)}{r}\right)^N\cos N(\varphi-\psi(\tau)) + \left(\frac{\varrho(\tau)}{r}\right)^{2N}}\sqrt{\varrho^2\dot\psi^2 + \dot\varrho^2}\,d\tau \tag{11}$$

einsetzen und noch zur Abkürzung

$$\gamma(\tau)\sqrt{\varrho^2\dot\psi^2 + \dot\varrho^2} = \sigma(\tau)$$

schreiben, erhalten wir für unser Problem die folgende Integralgleichung:

$$\left.\begin{aligned}&-\omega\, r(t)\,\dot r(t) - \frac{\Gamma_0}{2\pi}\frac{\dot r(t)}{r(t)} - \frac{Q_0}{2\pi}\dot\varphi(t)\\ &= \frac{N}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma(\tau)\,\frac{\frac{\dot r(t)}{r(t)} + \dot\varphi(t)\left(\frac{\varrho(\tau)}{r(t)}\right)^N\sin N(\varphi(t)-\psi(\tau)) - \frac{\dot r(t)}{r(t)}\left(\frac{\varrho(\tau)}{r(t)}\right)^N\cos N(\varphi(t)-\psi(\tau))}{1 - 2\left(\frac{\varrho(\tau)}{r(t)}\right)^N\cos N(\varphi(t)-\psi(\tau)) + \left(\frac{\varrho(\tau)}{r(t)}\right)^{2N}}\,d\tau\,.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Der Kern von (12) ist genau dann singulär, wenn zugleich $\varphi = \psi$ und $r = \varrho$ ist. Das ist immer der Fall, wenn $t = \tau$ ist; außerdem wenn $t = \pi$ und $\tau = -\pi$ oder umgekehrt ist.

Bezeichnen wir den Kern von (12) mit $K(t,\tau)$, so wird

$$\lim_{t\to\tau}\operatorname{tg}\frac{t-\tau}{2}\,K(t,\tau) = \lim_{t\to\tau}\frac{N}{2\pi}\,\frac{1}{t-\tau}\operatorname{tg}\frac{t-\tau}{2}\,\frac{\dot r\, r^{N-1}\frac{r^N-\varrho^N}{t-\tau} + r^N\varrho^N N\dot\varphi\frac{\varphi-\psi}{t-\tau}}{\left(\frac{r^N-\varrho^N}{t-\tau}\right)^2 + r^N\varrho^N N^2\left(\frac{\varphi-\psi}{t-\tau}\right)^2} = \frac{1}{4\pi}\,.$$

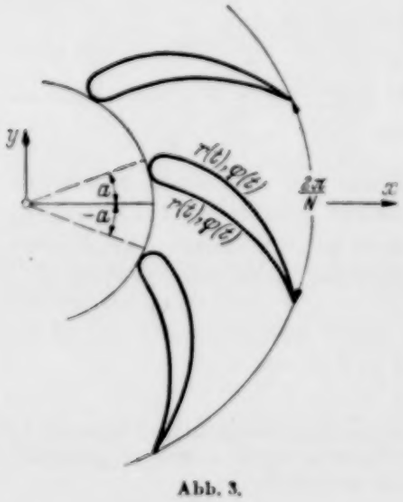

Abb. 3.

Ferner ist

$$\lim_{\substack{t\to\pi\\ \tau=-\pi}}\operatorname{tg}\frac{t-\tau}{2}\,K(t,\tau) = \lim_{t\to\tau}\operatorname{tg}\frac{t-\tau}{2}\cdot K(t,\tau) = \frac{1}{4\pi}\,,$$

da $r(-\pi) = r(\pi)$ und $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$ ist. Wir können also $K(t,\tau)$ auf die Form bringen:

$$K(t,\tau) = \frac{1}{4\pi}\left\{\operatorname{ctg}\frac{t-\tau}{2} + H(t,\tau)\right\}.$$

Dabei ist $H(t,\tau)$ im ganzen Bereich in beiden Variablen stetig. Die Durchführung des Grenzüberganges liefert noch

$$H(t,t) = \frac{\dot\varphi\,\ddot\varphi + N\,\frac{\dot r}{r}\,\dot\varphi^2 + (N-1)\left(\frac{\dot r}{r}\right)^3 + \frac{\dot r\,\ddot r}{r^2}}{\dot\varphi^2 + \left(\frac{\dot r}{r}\right)^2}\,. \tag{13}$$

Da der Kern von (12) eine vollständige Ableitung nach t darstellt, gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} K(t,\tau)\,dt = 0\,.$$

Daraus folgt, daß auch

$$\int_{-\pi}^{\pi} H(t,\tau)\,dt = 0 \tag{14}$$

sein muß, da von selbst

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{t-\tau}{2}\,dt = 0$$

ist. Mit

$$f(t) = -\,2\,\omega\,r(t)\,\dot r(t) - \frac{\Gamma_0}{\pi}\frac{\dot r(t)}{r(t)} - \frac{Q_0}{\pi}\dot\varphi(t)$$

läßt sich somit (12) auf die Form bringen:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma(\tau)\left[\operatorname{ctg}\frac{t-\tau}{2} + H(t,\tau)\right]d\tau\,. \tag{15}$$

Dabei ist $H(t,\tau)$ an die Bedingung (14) gebunden.

Für die Auflösung dieser Integralgleichung verweisen wir auf Arbeit I[1]. Die in der Lösung enthaltene freie Konstante

$$\Gamma = \int_{-\pi}^{\pi}\sigma(\tau)\,d\tau = \int_{-\pi}^{\pi}\gamma(\tau)\sqrt{\varrho^2\psi^2 + \dot\varrho^2}\,d\tau$$

wird durch die Abflußbedingung $\gamma(0) = 0$ bestimmt. Die innere Zirkulation Γ_0 kann z. B. festgelegt werden durch die Wahl einer Anströmrichtung.

Damit läßt sich aus (3), (4), (10), (11) das Geschwindigkeitsfeld der Gitterströmung in jedem Punkt (r,φ) der Gitterebene berechnen. Für die Berechnung der Druckverteilung außen am Profil muß man die resultierende Relativgeschwindigkeit an der Außenseite des Profils kennen. Ihr Quadrat im Punkte t ist gegeben durch

$$w^2(t) = \big(u_0(t) + u_\gamma(t) + \omega\,r(t)\sin\varphi(t) + \Delta u_\gamma(t)\big)^2 + \big(v_0(t) + v_\gamma(t) - \omega\,r(t)\cos\varphi(t) + \Delta v_\gamma(t)\big)^2$$

mit

$$\Delta u_\gamma = -\frac{\gamma}{2}\frac{\dot r\cos\varphi - r\,\dot\varphi\sin\varphi}{\sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2}}\,,\qquad \Delta v_\gamma = -\frac{\gamma}{2}\frac{\dot r\sin\varphi + r\,\dot\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2}}\,.$$

Der Drucksprung von der Druckseite zur Saugseite des Profils ergibt sich hier automatisch für die entsprechenden (voneinander verschiedenen) t-Werte.

4. Die Gitterstufe mit linienhaften Profilen. Wir kommen jetzt zur Behandlung einer Gitterstufe bestehend aus einem Leitradgitter und einem Laufradgitter (Abb. 4). Wir beziehen uns natürlich auf das Absolutsystem und betrachten eine „Momentaufnahme" der Stufe. Die Konturkurven der Schaufeln seien in der Form $r_1(\varphi_1)$; $r_2(\varphi_2)$ als stetige, eindeutige Funktionen gegeben. Bei allgemeinster Stellung von Laufrad und Leitrad gegeneinander ist

$$-a_1 \le \varphi_1 \le a_1\,,\qquad b - a_1 \le \varphi_2 \le b - a_1 + 2\,a_2\,.$$

Wegen $\delta > 0$ ist ferner stets $r_1 < r_2$.

Auf der Profilkurve $r_1(\varphi_1)$ sei die Zirkulationsverteilung $\gamma_1(\psi_1)$ und auf der Kurve $r_2(\varphi_2)$ die Zirkulationsverteilung $\gamma_2(\psi_2)$ angebracht. Es ist dann z. B.

$$u_{\gamma q}(r_p,\varphi_p) = \frac{N}{2\pi r_p}\int_{(q)}\gamma_q(\psi_q)\frac{\left(\frac{\varrho_q}{r_p}\right)^N\sin(N\varphi_p - N\psi_q - \varphi_p) + \sin\varphi_p}{1 - 2\left(\frac{\varrho_q}{r_p}\right)^N\cos N(\varphi_p - \psi_q) + \left(\frac{\varrho_q}{r_p}\right)^{2N}}\sqrt{\varrho_q^2 + \varrho_q'^2}\,d\psi_q$$

[1] Vgl. auch Fußnote von S. 205 und in diesem Falle: *W. Schmeidler*, Integralgleichungen I, S. 37, Leipzig 1950.

die x-Komponente der von der auf der Kurve $r_q(\varphi_q)$ angebrachten Zirkulationsverteilung γ_q in Punkten der Kurve $r_p(\varphi_p)$ induzierte Geschwindigkeit ($p, q = 1,2$). Unsere Aufgabe ist es nun, die Zirkulationsverteilungen γ_1 und γ_2 so zu bestimmen, daß $r_1(\varphi_1)$ Stromlinie in Bezug auf das absolute Geschwindigkeitsfeld und $r_2(\varphi_2)$ Stromlinie in Bezug auf das relative Geschwindigkeitsfeld wird (vgl. auch die Formulierung der Randbedingung in Ziff. 2). Diese Aufgabe führt auf folgende Bedingungsgleichungen, die ein System von Integralgleichungen für γ_1 und γ_2 darstellen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= [v_0(r_1(\varphi_1), \varphi_1) + v_{\gamma 1}(r_1(\varphi_1), \varphi_1) + v_{\gamma 2}(r_1(\varphi_1), \varphi_1)] \cos \vartheta_1 \\ &\quad - [u_0(r_1(\varphi_1), \varphi_1) + u_{\gamma 1}(r_1(\varphi_1), \varphi_1) + u_{\gamma 2}(r_1(\varphi_1), \varphi_1)] \sin \vartheta_1 , \\ \omega\, r_2(\varphi_2) \cos(\vartheta_2 - \varphi_2) &= [v_0(r_2(\varphi_2), \varphi_2) + v_{\gamma 1}(r_2(\varphi_2), \varphi_2) + v_{\gamma 2}(r_2(\varphi_2), \varphi_2)] \cos \vartheta_2 \\ &\quad - [u_0(r_2(\varphi_2), \varphi_2) + u_{\gamma 1}(r_2(\varphi_2), \varphi_2) + u_{\gamma 2}(r_2(\varphi_2), \varphi_2)] \sin \vartheta_2 . \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

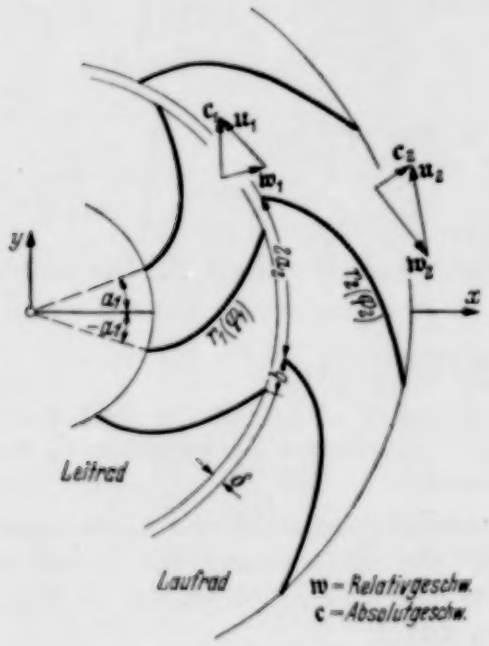

Abb. 4.

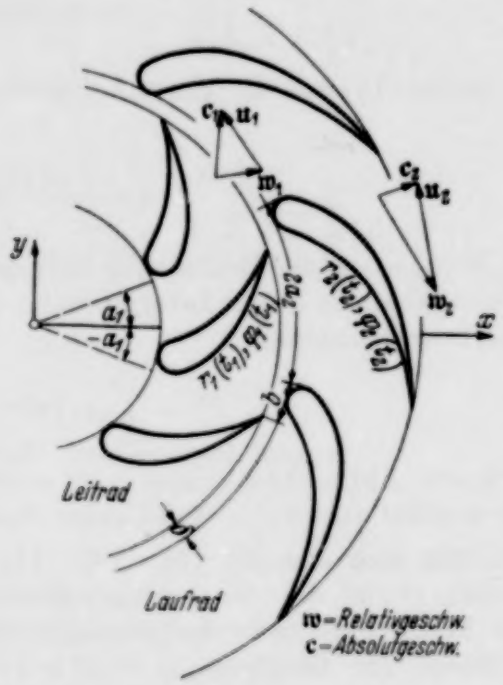

Abb. 5.

Eine Betrachtung ganz analog zu der in Ziff. 2 durchgeführten zeigt, daß (16) auf die Form gebracht werden kann.

$$\left.\begin{aligned} f_1(\varphi_1) &= \frac{1}{\pi} \int_{-a_1}^{a_1} \sigma_1(\psi_1) \left\{ \frac{1}{\varphi_1 - \psi_1} + H_{11}(\varphi_1, \psi_1) \right\} d\psi_1 + \frac{1}{\pi} \int_{b-a_1}^{b-a_1+2a_2} \sigma_2(\psi_2)\, H_{12}(\varphi_1, \psi_2)\, d\psi_2 , \\ f_2(\varphi_2) &= \frac{1}{\pi} \int_{-a_1}^{a_1} \sigma_1(\psi_1)\, H_{21}(\varphi_2, \psi_1)\, d\psi_1 + \frac{1}{\pi} \int_{b-a_1}^{b-a_1+2a_2} \sigma_2(\psi_2) \left\{ \frac{1}{\varphi_2 - \psi_2} + H_{22}(\varphi_2, \psi_2) \right\} d\psi_2 . \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Alle H_{pq} sind stetig in beiden Variablen ($p, q = 1,2$). Für H_{11} und H_{22} gilt Formel (8). Für die Auflösung des Systems (17) sei auf Arbeit I verwiesen[1]. Die in den Lösungen σ_1 und σ_2 enthaltenen freien Konstanten

$$\Gamma_1 = \int_{-a_1}^{a_1} \sigma_1(\psi_1)\, d\psi_1 , \qquad \Gamma_2 = \int_{b-a_1}^{b-a_1+2a_2} \sigma_2(\psi_2)\, d\psi_2$$

werden durch die Abflußbedingungen $\gamma_1(a_1) = 0$ und $\gamma_2(b - a_1) = 0$ festgelegt. Damit ist die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes möglich.

Die Ermittelung der Druckverteilung an den Profilen erfolgt prinzipiell wie beim Einzelgitter. (Für das Laufrad ist die *Bernoulli*sche Gleichung im Realtivsystem zu verwenden.) Das

[1] Die Auflösung erfolgt, indem zur Auflösung der einzelnen Integralgleichung (9) angewendete Methode ganz formal auf das System (17) übertragen wird.

Quadrat der resultierenden Absolutgeschwindigkeit an der Leitradschaufel ist gegeben durch

$$c^2 = (u_0 + u_{\gamma 1} + u_{\gamma 2} \pm \Delta u_{\gamma 1})^2 + (v_0 + v_{\gamma 1} + v_{\gamma 2} \pm \Delta v_{\gamma 1})^2 ,$$

während sich für das Quadrat der resultierenden Relativgeschwindigkeit an der Laufradschaufel ergibt

$$w^2 = (u_0 + u_{\gamma 1} + u_{\gamma 2} + \omega\, r_2 \sin \varphi_2 \pm \Delta u_{\gamma 2})^2 + (v_0 + v_{\gamma 1} + v_{\gamma 2} - \omega\, r_2 \cos \varphi_2 \pm \Delta v_{\gamma 2})^2 ;$$

(+) Saugseite, (—) Druckseite.

5. Die Gitterstufe mit endlich dicken Profilen. Unter Berücksichtigung der in Ziff. 2 bis 4 gewonnenen Ergebnisse ist es nun nicht mehr schwer, auch noch den Fall einer Gitterstufe mit endlich dicken Profilen zu behandeln (Abb. 5).

Die Profilkonturkurven, auf denen die Zirkulationsverteilungen γ_1 und γ_2 angebracht sind, geben wir in der Parameterdarstellung vor

$$\varphi_1(t_1) = a_1 \cos t_1 , \qquad r_1(t_1) = \sum_{\nu=-M_1}^{M_1} c_\nu^{(1)}\, e^{i\nu t_1} ,$$

$$\varphi_2(t_2) = -\, a_2 \cos t_2 + a_2 + b - a_1 , \qquad r_2(t_2) = \sum_{\nu=-M_2}^{M_2} c_\nu^{(2)}\, e^{i\nu t_2} ,$$

$$(-\pi \leq t_1 \leq \pi , \qquad -\pi \leq t_2 \leq \pi) .$$

Die auch hier vorliegende bereits in Ziff. 4 formulierte Aufgabe führt auf folgende Bedingungsgleichungen, die ein System von Integralgleichungen für γ_1 und γ_2 darstellen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= [v_0(r_1(t_1), \varphi_1(t_1)) + v_{\gamma 1}(r_1(t_1), \varphi_1(t_1)) \\ &\quad + v_{\gamma 2}(r_1(t_1), \varphi_1(t_1))] \cos \vartheta_1(t_1) - [u_0(r_1(t_1), \varphi_1(t_1)) \\ &\quad + u_{\gamma 1}(r_1(t_1), \varphi_1(t_1)) + u_{\gamma 2}(r_1(t_1), \varphi_1(t_1))] \sin \vartheta_1(t_1), \\ \omega\, r_2(t_2) \cos(\vartheta_2(t_2) - \varphi_2(t_2)) &= [v_0(r_2(t_2), \varphi_2(t_2)) + v_{\gamma 1}(r_2(t_2), \varphi_2(t_2)) \\ &\quad + v_{\gamma 2}(r_2(t_2), \varphi_2(t_2))] \cos \vartheta_2(t_2) - [u_0(r_2(t_2), \varphi_2(t_2)) \\ &\quad + u_{\gamma 1}(r_2(t_2), \varphi_2(t_2)) + u_{\gamma 2}(r_2(t_2), \varphi_2(t_2))] \sin \vartheta_2(t_2) . \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Wie eine Untersuchung analog zu Ziff. 3 zeigt, kann (18) auf die Form gebracht werden

$$\left.\begin{aligned} f_1(t_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_1(\tau_1) \left[\operatorname{ctg} \frac{t_1 - \tau_1}{2} + H_{11}(t_1, \tau_1)\right] d\tau_1 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_2(\tau_2)\, H_{12}(t_1, \tau_2)\, d\tau_2 , \\ f_2(t_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_1(\tau_1)\, H_{21}(t_2, \tau_1)\, d\tau_1 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_2(\tau_2) \left[\operatorname{ctg} \frac{t_2 - \tau_2}{2} + H_{22}(t_2, \tau_2)\right] d\tau_2 . \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Alle H_{pq} sind in beiden Variablen stetig, und für sie gilt die Relation

$$\int_{-\pi}^{\pi} H_{pq}(t_p, \tau_q)\, dt_p = 0 \qquad (p, q = 1,2) . \tag{20}$$

Für H_{pp} gilt außerdem Formel (13).

Für die Auflösung des Systems (19) mit der Zusatzbedingung (20) wird wieder auf Arbeit I verwiesen. Die in den Lösungen σ_1 und σ_2 enthaltenen freien Konstanten

$$\Gamma_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_1(\tau_1)\, d\tau_1 , \qquad \Gamma_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_2(\tau_2)\, d\tau_2$$

werden durch die Abflußbedingungen $\gamma_1(0) = 0$ und $\gamma_2(0) = 0$ festgelegt. Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes ist nun möglich.

Die Ermittelung der Druckverteilung an den Profilen erfolgt prinzipiell in gleicher Weise wie vorher (vgl. Ziff. 3 u. 4).

6. Der Sonderfall schwach gekrümmter Profile. Liegt ein Gitter mit linienhaften Profilen vor, die so schwach gekrümmt sind, daß man in guter Annäherung die Zirkulationsverteilung auf der Profilsehne anbringen und die dort induzierte Geschwindigkeit auf die Skelettlinie des Profils übertragen kann, so ergibt sich aus den in Ziff. **2** aufgestellten Formeln an Stelle von (7) eine Integralgleichung, die bereits von *Kucharski* [1] gelöst worden ist.

Im Falle der Gitterstufe wird man mit der Näherungstheorie für schwach gekrümmte Profile auf das Integralgleichungssystem von *Söhngen* [2] geführt, das geschlossen auflösbar ist.

7. Zusammenfassung: Es wird die Strömung durch radiale Schaufelgitter nach der Singularitätenmethode behandelt. Dabei werden die Zirkulationsverteilungen auf den Profilkonturen selbst angeordnet. Es ist möglich, sowohl Einzelgitter als auch Gitterstufen mit linienhaften und mit endlich dicken Profilen nach einer einheitlichen Methode zu behandeln.

(Eingegangen am 7. September 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *W. Isay*, Berlin-Dahlem, Schweinfurthstr. 90.

[1] *W. Kucharski*, Z. angew. Math. Mech. 21 (1941) S. 65.
[2] Vgl. *W. Schmeidler*, Integralgleichungen Bd. I, S. 56, Leipzig 1950.

Die Berechnung der Kräfteumlagerungen bei einem einfach symmetrischen, in mehreren Lagen vorgespannten Betonbalken infolge Kriechen und Schwinden des Betons.

Von H. Bechert.

1. Die plastischen Verformungen des Betons. Nach *Dischinger* verlaufen die plastischen Verformungen einer Betonfaser, das von der Belastung hervorgerufene Kriechen und die Eigenverkürzung des Betons, gen. Schwinden, nach der Gleichung:

$$\frac{\partial \varepsilon_b}{\partial t} = \frac{d\varepsilon_b}{dt} + \varepsilon_b \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\varepsilon_{sch}}{\varphi_E} \frac{d\varphi}{dt} . \tag{I}$$

Darin bedeuten ε_b die Betondeformation zur Zeit t, ε_{sch} die Schwindverkürzung des Betons, $\varphi = \varphi(t)$ das Verhältnis der plastischen zur elastischen Verformung des Betons, φ_E dieses Verhältnis nach Abschluß der plastischen Verformungen, t die Zeit nach dem Einleiten der Kräfte auf den Balken.

Setzt man nun die Betondeformation zusammen aus der elastischen Verformung ε_{b_0} zur Zeit $t = t_0$ und dem dazutretenden plastischen Verformungsbeitrag $\bar{\varepsilon}_b$, dann ergibt sich aus (I) bei Annahme eines in der Zeit und über den Querschnitt konstanten Elastizitätsmoduls des Betons die Gleichung:

$$\frac{\partial \varepsilon_b}{dt} = \frac{d\bar{\varepsilon}_b}{dt} + (\varepsilon_{b_0} + \bar{\varepsilon}_b) \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\varepsilon_{sch}}{\varphi_E} \frac{d\varphi}{dt} . \tag{Ia}$$

2. Herleitung der Gleichungen. Es wird nun angenommen, alle Stahleinlagen seien unmittelbar vor oder nach Einleitung der ständigen Lasten, dem Zeitpunkt $t = t_0$, mit dem Beton in Verbund gebracht worden, so daß bei den nunmehr folgenden Deformationen die

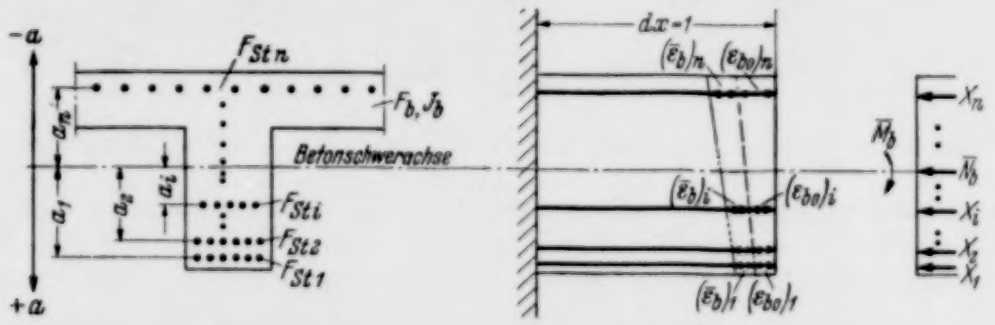

Abb. 1. Verformungen und Kräfte am Element infolge der Plastizität.

Stahleinlagen jeweils dieselben Verformungen wie die im selben Abstand von der Schwerlinie des Betonquerschnitts liegende Betonfaser mitmachen müssen, d. h. es muß sein

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_b}{\partial t}\right)_i = \left(\frac{d\varepsilon_s}{dt}\right)_i , \tag{1}$$

wenn $\varepsilon_{s\,i}$ die Stahldeformation der Lage i und $(\varepsilon_b)_i$ die Betondeformation der entsprechenden Faser ist. Für jede Lage haben wir eine solche Gleichung, also insgesamt n Gleichungen. Aus (1) mit (Ia) ergibt sich nach einer Umformung

$$\left(\frac{d\bar{\varepsilon}_b - d\varepsilon_s}{d\varphi}\right)_i + (\bar{\varepsilon}_b)_i + \left(\varepsilon_{b_0} + \frac{\varepsilon_{sch}}{\varphi_E}\right)_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots n) . \tag{2}$$

In der Gleichung (2) sind nun die bekannten Größen von den unbekannten getrennt. Der Term $\varepsilon_{sch}/\varphi_E$ ergibt sich aus Erfahrungswerten und wird in der Regel für alle Fasern gleich groß angenommen. Die $(\varepsilon_{b_0})_i$ ergeben sich durch Berechnung der Gleichgewichtsgruppe im Zeitpunkt t_0, wobei wir Stauchungen als positiv einführen wollen. Dieser Gleichgewichtsgruppe wird nun die durch die plastischen Verformungen ausgelöste Kräftegruppe überlagert.

Die Deformation einer Betonfaser i im Abstand a_i ergibt sich zu

$$\varepsilon_{bi} = \varepsilon_{bs} + a_i \gamma_b , \tag{3}$$

wenn ε_{bs} die Verformung in der Betonschwerachse und γ_b der Verdrehungswinkel des Betonquerschnittes bedeuten. Wir definieren weiterhin die Steifigkeiten mit

$$\left.\begin{aligned} &K_b = E_b F_b && (E_b = \text{Betonelastizitätsmodul}),\\ &S_b = E_b J_b && (F_b = \text{Betonfläche}),\\ & && (J_b = \text{Betonträgheitsmoment}),\\ &(K_{st})_i = (E_{st} F_{st})_i && \text{mit } E_{sti} \text{ als Stahlelastizitätsmodul der Lage } i \text{ und } F_{sti} \text{ als Fläche derselben Lage.} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dann führen wir die durch die plastischen Verformungen in den Stählen hervorgerufene Kräfte X_i als Druckkräfte ein. Die Gleichgewichtsbedingungen im Querschnitt liefern dann

$$\bar{N}_b = -\sum_{k=1}^{n} X_k , \qquad \bar{M}_b = -\sum_{k=1}^{n} a_k X_k . \tag{5}$$

Setzt man die Gleichungen (4) und (5) in (3) ein, so kommt zusammengefaßt

$$(\bar{\varepsilon}_b)_i = -\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{K_b} + \frac{a_i a_k}{S_b} \right) X_k . \tag{6}$$

Definieren wir nun die folgenden Matrizen:

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{bo\,1} + \varepsilon_{sch}/\varphi_E \\ \varepsilon_{bo\,2} + \varepsilon_{sch}/\varphi_E \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \varepsilon_{bo\,n} + \varepsilon_{sch}/\varphi_E \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{K_{s1}} + \frac{1}{K_b} + \frac{a_1^2}{S_b} ; & \frac{1}{K_b} + \frac{a_1 a_2}{S_b} ; \ldots . & \frac{1}{K_b} + \frac{a_1 a_n}{S_b} \\ \frac{1}{K_b} + \frac{a_1 a_2}{S_b} ; & \frac{1}{K_{s2}} + \frac{1}{K_b} + \frac{a_2^2}{S_b} ; \ldots . & \frac{1}{K_b} + \frac{a_2 a_n}{S_b} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \frac{1}{K_b} + \frac{a_1 a_n}{S_b} ; & \frac{1}{K_b} + \frac{a_2 a_n}{S_b} ; \ldots . & \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\vartheta = \begin{pmatrix} \frac{1}{K_b} + \frac{a_1^2}{S_b} ; & \frac{1}{K_b} + \frac{a_1 a_2}{S_b} ; \ldots . & \frac{1}{K_b} + \frac{a_1 a_n}{S_b} \\ \frac{1}{K_b} + \frac{a_1 a_2}{S_b} ; & \frac{1}{K_b} + \frac{a_2^2}{S_b} ; \ldots . & \frac{1}{K_b} + \frac{a_2 a_n}{S_b} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \frac{1}{K_b} + \frac{a_1 a_n}{S_b} ; & \frac{1}{K_b} + \frac{a_2 a_n}{S_b} ; \ldots . & \frac{1}{K_b} + \frac{a_n^2}{S_b} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

dann lautet das System der Differentialgleichungen

$$\mathfrak{K} \frac{d\mathfrak{x}}{d\varphi} + \vartheta \mathfrak{x} = \mathfrak{F} , \tag{11}$$

wobei die Matrizen $\mathfrak{K}$ und ϑ symmetrisch sind. $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{F}$ sind Spaltenvektoren.

3. Lösung des Systems. Die exakte Auflösung des Systems bereitet theoretisch keine Schwierigkeiten. Dagegen ist schon bei mehr als zwei Lagen die Rechenarbeit zur Erlangung zahlenmäßiger Werte recht erheblich. Von den drei Schritten zur Lösung des Systems

a) Berechnung des expliziten Systems,
b) Berechnung der Eigenwerte der Matrix des expliziten Systems,
c) Lösung des Anfangswertproblems

ist durch das folgende, rasch konvergierende Iterationsverfahren nur der erste nötig.

Die explizite Form von (II) lautet

$$\frac{d\mathfrak{x}}{d\varphi} = \mathfrak{N}^{-1}\,\mathfrak{s} - \mathfrak{N}^{-1}\,\vartheta\,\mathfrak{x}\,, \tag{11}$$

wobei die reziproke Matrix $\mathfrak{N}^{-1}$ leicht nach schon bekannten Verfahren ermittelt werden kann. Definiert man die Matrizenprodukte mit

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{N}^{-1}\,\mathfrak{s}\,, \tag{12}$$

$$\mathfrak{N}^{-1}\,\vartheta = \mathfrak{B}\,, \tag{13}$$

dann lautet (11)

$$\frac{d\mathfrak{x}}{d\varphi} = \mathfrak{z} - \mathfrak{B}\,\mathfrak{x}\,. \tag{11a}$$

Die Matrix $\mathfrak{B}$ hat nur reelle negative Eigenwerte λ_i, wie aus den technischen Gegebenheiten folgt. Ferner folgt daraus

$$|\lambda_i| < 1\,. \tag{14}$$

Das erweiterte Iterationsverfahren von *Picard-Lindelöf* liefert dann meist schon nach wenigen Schritten brauchbare Werte. Die Iterationsvorschrift lautet

$$\mathfrak{x}_{m+1} = \int_0^{\varphi} (\mathfrak{z} - \mathfrak{B}\,\mathfrak{x}_m)\,d\varphi\,. \tag{III}$$

Das führt auf die Reihe

$$\mathfrak{x}_m = \mathfrak{z}\,\varphi - \mathfrak{B}\,\mathfrak{z}\,\frac{\varphi^2}{2!} + \mathfrak{B}^2\,\mathfrak{z}\,\frac{\varphi^3}{3!} - + \ldots + (-1)^{m-1}\,\mathfrak{B}^{m-1}\,\mathfrak{z}\,\frac{\varphi^m}{m!}\,. \tag{15}$$

Setzt man die Reihe beliebig weit fort, so ergibt sich nach Erweiterung mit $\mathfrak{B}$ und beiderseitiger Subtraktion von $\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{z}$, wobei $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix darstellt, die Lösung des Systems von Differentialgleichungen zu

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{B}^{-1}\,(\mathfrak{E} - e^{-\mathfrak{B}\varphi})\,\mathfrak{z}\,. \tag{IV}$$

Zu dieser Lösung kommt man noch schneller durch formale Integration von (II). Für die praktische Anwendung genügt bereits nach (15)

$$\mathfrak{x}_3 = \mathfrak{z}\,\varphi - \mathfrak{B}\,\mathfrak{z}\,\frac{\varphi^2}{2!} + \mathfrak{B}^2\,\mathfrak{z}\,\frac{\varphi^3}{3!}\,. \tag{15a}$$

Der exakte mathematische Beweis des Verfahrens ist in der Literatur[1] zu finden.

4. Beispiel. Gegeben ist der in Abb. 2 skizzierte Plattenbalkenquerschnitt mit den Werten $F_b = 33040\ \mathrm{cm}^2$, $J_b = 76\,440\,000\ \mathrm{cm}^4$, $E_b = 300\,000\ \mathrm{kg/cm}^2$, $E_{st} = 2{,}1 \cdot 10^6\ \mathrm{kg/cm}^2$, $F_{st1} = F_{st2} = 63{,}6\ \mathrm{cm}^2 : F_{st3} = 42{,}4\ \mathrm{cm}^2$, $a_1 = 82\ \mathrm{cm} : a_2 = 63\ \mathrm{cm} : a_3 = 47\ \mathrm{cm}$.

Ferner betragen die Spannungen in den einzelnen Fasern bei den einzelnen Lastzuständen zur Zeit $t = t_0$

a) Eigengewicht: $\sigma_{b1} = -69$; $\sigma_{b2} = -53$;
$\sigma_{b3} = -39\ \mathrm{kg/cm}^2$ (Zug)

b) Vorspannung: $\sigma_{b1} = +149$; $\sigma_{b3} = +124$;
$\sigma_{b3} = +103\ \mathrm{kg/cm}^2$ (Druck).

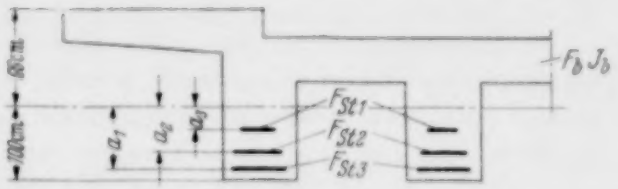

Abb. 2.

Ferner sei $\varphi_E = 2{,}0$ und $\varepsilon_{sch} = 0{,}0002$.

Daraus ergeben sich dann die 10^6-fachen Werte der Matrizen nach

$$\mathfrak{s}_g = \begin{pmatrix} -230 \\ -177 \\ -130 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{s}_v = \begin{pmatrix} +497 \\ +413 \\ +343 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{s}_{sch} = \begin{pmatrix} +100 \\ +100 \\ +100 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

nach (9)
$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} 0{,}007\,879; & 0{,}000\,334; & 0{,}000\,277 \\ 0{,}000\,334; & 0{,}007\,759; & 0{,}000\,238 \\ 0{,}000\,277; & 0{,}000\,238; & 0{,}011\,435 \end{pmatrix}$$

[1] *K. Sattler*, Theorie der Verbundkonstruktionen, Berlin 1952; *E. Kamke*, Differentialgleichungen Bd. I, Leipzig 1942, *R. Zurmühl*, Matrizen, Berlin 1950.

und
$$\mathfrak{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 127{,}2525; & -5{,}3867; & -2{,}9704 \\ -5{,}3867; & 129{,}1930; & -2{,}5584 \\ -2{,}9704; & -2{,}5584; & +87{,}5761 \end{pmatrix},$$

nach (10)
$$\vartheta = \begin{pmatrix} 0{,}000\,392; & 0{,}000\,334; & 0{,}000\,277 \\ 0{,}000\,334; & 0{,}000\,272; & 0{,}000\,238 \\ 0{,}000\,277; & 0{,}000\,238; & 0{,}000\,205 \end{pmatrix}.$$

Für die explizite Form nach (12) und (13) und (11a) ergibt sich

$$\mathfrak{z}_g = \begin{pmatrix} -27\,928 \\ -21\,295 \\ -10\,248 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{z}_v = \begin{pmatrix} +60\,000 \\ +49\,802 \\ +27\,506 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{z}_{sch} = \begin{pmatrix} +11\,889 \\ +12\,425 \\ +\ 8\,204 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0{,}047\,26; & 0{,}040\,33; & 0{,}033\,36 \\ 0{,}040\,33; & 0{,}032\,73; & 0{,}028\,73 \\ 0{,}022\,24; & 0{,}019\,15; & 0{,}016\,52 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{B}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}004\,60; & 0{,}003\,86; & 0{,}003\,28 \\ 0{,}003\,86; & 0{,}003\,25; & 0{,}002\,76 \\ 0{,}002\,19; & 0{,}001\,84; & 0{,}001\,56 \end{pmatrix}.$$

Nach (15) ergibt sich dann, wenn man nach dem dritten Glied abbricht, da die dazukommenden Glieder schon kleiner sind als 0,5 % des ersten,

$$\mathfrak{x}_g = \begin{pmatrix} -\ 55\,856 \\ -\ 42\,591 \\ -\ 20\,498 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\ 5\,041 \\ -\ 4\,235 \\ -\ 2\,396 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\ 324{,}9 \\ -\ 273{,}0 \\ -\ 154{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ 51\,140 \\ -\ 38\,628 \\ -\ 18\,256 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{x}_v = \begin{pmatrix} +\ 120\,002 \\ +\ \ 99\,603 \\ +\ \ 55\,011 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} +\ 11\,523 \\ +\ \ 9\,680 \\ +\ \ 5\,485 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +\ 667{,}5 \\ +\ 624{,}3 \\ +\ 353{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\ 109\,146 \\ +\ \ 90\,548 \\ +\ \ 49\,880 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{x}_{sch} = \begin{pmatrix} +\ 23\,779 \\ +\ 24\,849 \\ +\ 16\,409 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} +\ 2673{,}4 \\ +\ 2243{,}8 \\ +\ 1275{,}8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +\ 166{,}6 \\ +\ 144{,}9 \\ +\ \ 82{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\ 21\,272 \\ +\ 22\,751 \\ +\ 15\,215{,}6 \end{pmatrix}.$$

Die einzelnen Anteile am Spannungsabfall im Spannstahl errechnen sich dann zu

$$\Delta\sigma = \sigma_g + \sigma_v + \sigma_{sch},$$

$$\Delta\sigma_1 = -\ 804 + 1716 + 334 = +\ 1246\ \mathrm{kg/cm^2},$$
$$\Delta\sigma_2 = -\ 607 + 1424 + 357 = +\ 1174\ \mathrm{kg/cm^2},$$
$$\Delta\sigma_3 = -\ 430 + 1176 + 359 = +\ 1105\ \mathrm{kg/cm^2}.$$

Das Vorteilhafte an dieser Berechnungsart ist, daß man ständig mit dem Rechenschieber und der Rechenmaschine die einzelnen Operationen ausführen kann.

5. Übersicht. Von den von *Dischinger* entwickelten Ansätzen für die plastische Verformung des Beton ausgehend, werden die Gleichungen für die Umlagerungskräfte eines vorgespannten, von mehreren Lagen Stahl durchsetzten Betonbalkens angegeben. Sie stellen sich in Form eines gekoppelten Systems von Differentialgleichungen dar. Zur Lösung der expliziten Form dieses Systems wird das äußerst rasch konvergierende Näherungsverfahren von *Picard-Lindelöf* benützt.

Für die Anregung zu dieser Arbeit möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. *B. Fritz*, T.H. Karlsruhe herzlich danken.

(Eingegangen am 16. September 1953.)

Anschrift des Verfassers, Dipl.-Ing. *Hch. Bechert*, Karlsruhe, Lehrstuhl für Baustatik der Techn. Hochschule.

Zur kinetischen Bestimmung der Kennlinie eines nichtlinearen freien Schwingers.

Von H. Kauderer.

1. Aufgabenstellung und Übersicht. Läßt sich für einen freien ungedämpften nichtlinearen Schwinger auf Grund statischer Messungen der Verlauf der Kennlinie als Funktion des Ausschlags ermitteln, so kann man bekanntlich die bei nichtlinearen Schwingern von der Amplitude Q abhängige Schwingungsdauer T durch ein Integral darstellen, das sich stets näherungsweise und in gewissen Sonderfällen sogar exakt auswerten läßt. Nun gibt es aber auch zahlreiche Fälle (z. B. in der Uhrentechnik), wo man die Kennlinie nur sehr ungenau oder überhaupt nicht mit statischen Methoden aufnehmen, wohl aber dank der technisch hochentwickelten Zeitmeßgeräte die Schwingungsdauer in Abhängigkeit von der Amplitude mit jeder gewünschten Genauigkeit messen kann. Möchte man nun aus dieser Ausmessung eines kinetischen Vorgangs den Verlauf der Kennlinie bestimmen, so ist das eingangs genannte Problem umzukehren: Vorgegeben ist die Schwingungsdauer T eines einfachen freien Schwingers als willkürliche Funktion seiner Amplitude Q; gesucht ist seine (nichtlineare) Kennlinie. Es soll hier versucht werden, einen Beitrag zur allgemeinen Lösung dieses Umkehrproblems zu liefern.

Wir behandeln zuerst (Ziff. 2) eine für unser Problem notwendige Hilfsaufgabe, die auf eine Abelsche Integralgleichung führt. Sodann zeigen wir (Ziff. 3), wie man für den Fall, daß die Schwingungsdauer T als Potenzreihe in Q^2 vorgeschrieben ist, aus den Koeffizienten dieser Potenzreihe die entsprechenden Koeffizienten einer nach Potenzen des Ausschlags fortschreitenden Reihenentwicklung für die Kennlinie gewinnt. Dasselbe Problem für den allgemeineren Fall, daß T als Potenzreihe in Q vorgeschrieben ist, läßt sich in ähnlicher Weise lösen, wobei sich für die Kennlinie eine Parameterstellung ergibt (Ziff. 4). Es folgen einige Anwendungsbeispiele (Ziff. 5) und ein Verfahren zur Nachprüfung der Genauigkeit der Rechenergebnisse, die man erhält, wenn man bei der praktischen Auswertung die Potenzreihen nach einer endlichen Anzahl von Gliedern abbricht (Ziff. 6). Zum Schluß soll noch für den Sonderfall, daß die Schwingungsdauer als lineare Funktion der Amplitude vorgeschrieben ist, eine geschlossene Lösung für die Kennlinie in Parameterform hergeleitet werden, die bis jetzt noch nicht bekannt zu sein scheint (Ziff. 7).

2. Die Abelsche Hilfsaufgabe. Wir gehen davon aus, daß der Ausschlag q des Schwingers eine Bewegungsgleichung von der Form

$$a\,\ddot{q} + R(q) = 0 \tag{1}$$

befolgen muß, in der a eine positive Konstante (Masse) und $R(q)$ die Rückstellkraft bedeuten. Ihr Kurvenbild (Kennlinie) verlaufe symmetrisch zum Nullpunkt [d. h. es sei $R(q) = -R(-q)$, also speziell $R(0) = 0$], und sie sei für positive q selbst positiv. Dann ist ihr Potential

$$U(q) = \int_0^q R(q)\,dq \tag{2}$$

für $q > 0$ monoton wachsend, und es existiert somit eine eindeutige positive Umkehrung $q = \varphi(U)$ dieser Funktion. Mit Hilfe der aus (1) folgenden Energiegleichung

$$\frac{a}{2}\,\dot{q}^2 + U(q) = h,$$

in der $h = U(Q)$ das Potential für die Amplitude $q = Q$ (die sog. Schwingerenergie) bedeutet, läßt sich dann die Schwingungsdauer T als Funktion der Amplitude durch das uneigentliche Integral

$$T(Q) = 2\sqrt{2a}\int_0^Q \frac{dq}{\sqrt{h - U(q)}} \tag{3}$$

darstellen. Wenn wir in dieser Gleichung mittels der Funktion $q = \varphi(U)$ an Stelle von q das Potential U als Integrationsveränderliche einführen, so erhalten wir mit dem nunmehr der oberen Grenze Q des Integrals entsprechenden Wert h die Schwingungsdauer als Funktion der

Schwingerenergie in der Form

$$T(h) = 2\sqrt{2a}\int_0^h \frac{\frac{d\varphi}{dU}}{\sqrt{h-U}}\,dU\,.$$

Denken wir uns nun die Energie h nicht mehr als konstant, sondern als veränderlichen Parameter, und die Schwingungsdauer T als Funktion dieses Parameters vorgeschrieben, so stellt die Beziehung eine Abelsche Integralgleichung für die Ableitung $d\varphi/dU$ dar, die sich in bekannter Weise[1] nach $\varphi(U)$ auflösen läßt. Da $q = \varphi(U)$ wegen (2) für $U = 0$ verschwinden muß, erhält man hierbei den Ausschlag q als Funktion des Potentials U in der Form

$$q = \varphi(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2a}}\int_0^U \frac{T(h)}{\sqrt{U-h}}\,dh\,. \tag{4}$$

Mit der aus (2) folgenden Beziehung

$$R = \frac{dU}{dq} \tag{5}$$

wird dann die Rückstellkraft als Funktion des Potentials

$$R(U) = \frac{1}{d\varphi/dU}\,. \tag{6}$$

Die Gleichungen (4) und (6) setzen uns instand, mit Hilfe des Potentials U, das hier die Rolle eines Parameters spielt, die Beziehung zwischen Rückstellkraft R und Ausschlag q herzustellen, wenn die Schwingungsdauer T als Funktion der jeweiligen Schwingerenergie h vorgegeben ist.

Dieses im wesentlichen schon auf *Abel* zurückgehende Ergebnis soll uns dazu dienen, unsere eigentliche Aufgabe, bei der T nicht als Funktion von h sondern von der Amplitude Q vorgeschrieben ist, zu lösen. Wir werden diese Lösung nun zuerst für den Fall erbringen, daß T durch eine nach ganzen Potenzen von Q^2 aufsteigende Potenzreihe darstellbar ist.

3. Die Schwingungsdauer ist durch eine Potenzreihe in Q^2 vorgeschrieben. Wir haben hier vorauszusetzen, daß sich die Schwingungsdauer T als Funktion von h in einer Taylorschen Reihe

$$T(h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\,T^{(\nu)}(0)\,h^\nu \tag{7}$$

mit

$$T^{(\nu)}(0) = \left(\frac{d^\nu T}{dh^\nu}\right)_{h=0}\,,\quad T^{(0)}(0) = T(0)$$

darstellen läßt. Gehen wir hiermit in Gleichung (4) ein und integrieren gliedweise, so ergibt sich $\varphi(U)$ ebenfalls in Form einer Reihe zu

$$\varphi(U) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi a}}\sqrt{U}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)!}\,T^{(\nu)}(0)\,U^\nu. \tag{8}$$

Wir führen nun eine Funktion

$$\zeta(U) \equiv [\varphi(U)]^2$$

ein und erhalten so mit den ersten fünf Gliedern der Potenzreihe (8)

$$\zeta(U) = \frac{1}{8\pi^2 a}\,U\left[2T(0) + \frac{4}{3}\,T'(0)\,U + \frac{8}{15}\,T''(0)U^2 + \frac{16}{105}\,T'''(0)U^3 + \frac{32}{945}\,T''''(0)U^4 + \cdots\right]^2.$$

Dies stellt, wenn wir ausquadrieren, eine Potenzreihe für $\zeta(U)$ dar, die sich in der Form

$$\zeta(U) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\zeta_\nu\,U^\nu \tag{9}$$

[1] Vgl. etwa *F. Schwank*, Randwertprobleme, S. 291, Leipzig 1951.

schreiben läßt, wobei die ersten fünf Koeffizienten ζ_i die Werte

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_1 &= \frac{1}{8\,\pi^2\,a}\cdot 4\;T(0)^2\,,\\
\zeta_2 &= \frac{1}{8\,\pi^2\,a}\cdot\frac{16}{3}\;T(0)\;T'(0)\,,\\
\zeta_3 &= \frac{1}{8\,\pi^2\,a}\left[\frac{32}{15}\;T(0)\;T''(0)+\frac{16}{9}\,T'(0)^2\right],\\
\zeta_4 &= \frac{1}{8\,\pi^2\,a}\left[\frac{64}{105}\;T(0)\;T'''(0)+\frac{64}{45}\;T'(0)\;T''(0)\right],\\
\zeta_5 &= \frac{1}{8\,\pi^2\,a}\left[\frac{128}{945}\;T(0)\;T''''(0)+\frac{128}{315}\;T'(0)\;T'''(0)+\frac{64}{225}\;T''(0)^2\right]
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

annehmen.

Ist nun die Schwingungsdauer T in Abhängigkeit vom Ausschlag durch eine Potenzreihe in der Form

$$T=\tau_0+\tau_2\,Q^2+\tau_4\,Q^4+\tau_6\,Q^6+\tau_8\,Q^8+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\tau_{2n}\,Q^{2n} \tag{11}$$

vorgegeben, so führen wir die Rechnung folgendermaßen weiter: Da zu $q=Q$ der Wert $U=h$ gehört, ersetzen wir in (11) die Potenzen von Q^2 durch diejenigen von $\zeta(h)=\sum_1^{\infty}\zeta_\nu h^\nu$ und erhalten so nach Umordnung der Reihenglieder für T eine Reihe nach Potenzen von h, aus der sich durch Vergleich mit der entsprechenden Reihe (7) die Werte der Ableitungen $T^{(n)}(0)$ in den ζ_i und den τ_i ausdrücken lassen. Wenn wir mit diesen Ableitungen in die Gleichungen (10) eingehen, bekommen wir Rekursionsformeln für die ζ_i, aus denen sich diese der Reihe nach in den τ_i ausdrücken lassen. Hiermit sind die Koeffizienten der Potenzreihe (9) in den gegebenen τ_i dargestellt. Nun kehren wir diese Potenzreihe um und erhalten $U(\zeta)$ in Form einer nach Potenzen von $\zeta=q^2$ fortschreitenden Reihe, deren Koeffizienten in den τ_i ausgedrückt werden. Die Ableitung dieser Potenzreihe nach q liefert dann schließlich gemäß (5) die gesuchte Reihendarstellung für den Verlauf der Rückstellkraft $R(q)=dU/dq$.

Mit $Q^2=\zeta(h)$ erhalten wir aus (11)

$$T(h)=\sum_{n=0}^{\infty}\tau_{2n}\,[\zeta(h)]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\tau_{2n}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\zeta_\nu\,h^\nu\right)^n$$

oder, wenn wir potenzieren und das Ergebnis nach Potenzen von h ordnen,

$$\begin{aligned}
T(h)=\tau_0+\tau_2\zeta_1 h+(\tau_2\zeta_2+\tau_4\zeta_1^2)\,h^2+(\tau_2\zeta_3+2\,\tau_4\zeta_1\zeta_2+\tau_6\zeta_1^3)\,h^3+\\
+[\tau_2\zeta_4+\tau_4\,(2\,\zeta_1\zeta_3+\zeta_2^2)+3\,\tau_6\zeta_1^2\zeta_2+\tau_8\zeta_1^4]\,h^4+\cdots,
\end{aligned}$$

woraus sich durch Vergleich mit (7)

$$\begin{aligned}
T(0) &= \tau_0\,,\\
T'(0) &= \tau_2\zeta_1\,,\\
T''(0) &= 2\,(\tau_2\zeta_2+\tau_4\zeta_1^2)\,,\\
T'''(0) &= 6\,(\tau_2\zeta_3+2\,\tau_4\zeta_1\zeta_2+\tau_6\zeta_1^3)\,,\\
T''''(0) &= 24\,[\tau_2\zeta_4+\tau_4\,(2\,\zeta_1\zeta_3+\zeta_2^2)+3\,\tau_6\zeta_1^2\zeta_2+\tau_8\zeta_1^4]
\end{aligned}$$

ergibt. Gehen wir hiermit in (10) ein, so folgen die Rekursionsformeln für die ζ_i:

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \frac{1}{\pi^2\,a}\cdot\frac{1}{2}\,\tau_0^2\,,\\
\zeta_2 &= \frac{1}{\pi^2\,a}\cdot\frac{2}{3}\,\tau_0\tau_2\zeta_1\,,\\
\zeta_3 &= \frac{1}{\pi^2\,a}\left[\frac{4}{15}\,\tau_0\cdot 2\,(\tau_2\zeta_2+\tau_4\zeta_1^2)+\frac{2}{9}\,\tau_2^2\zeta_1^2\right],\\
\zeta_4 &= \frac{1}{\pi^2\,a}\left[\frac{8}{105}\,\tau_0\cdot 6\,(\tau_2\zeta_3+2\,\tau_4\zeta_1\zeta_2+6\,\zeta_1^3)+\frac{8}{45}\,\tau_2\zeta_1\cdot 2\,(\tau_2\zeta_2+\tau_4\zeta_1^2)\right],\\
\zeta_5 &= \frac{1}{\pi^2\,a}\left[\frac{16}{945}\,\tau_0\cdot 24\,[\tau_2\zeta_4+\tau_4\,(2\,\zeta_1\zeta_3+\zeta_2^2)+3\,\tau_6\zeta_1^2\zeta_2+\tau_8\zeta_1^4]+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{16}{315}\,\tau_2\zeta_1\cdot 6\,(\tau_2\zeta_3+2\,\tau_4\zeta_1\zeta_2+\tau_6\zeta_1^3)+\frac{8}{225}\cdot 4\,(\tau_2\zeta_2^2+2\,\tau_2\tau_4\zeta_1^2\zeta_2+\tau_4^2\zeta_1^4)\right],
\end{aligned}$$

deren Auswertung der Reihe nach

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_1 &= \frac{1}{\pi^2 a}\cdot\frac{1}{2}\tau_0^2,\\
\zeta_2 &= \frac{1}{(\pi^2 a)^2}\cdot\frac{1}{3}\tau_0^3\tau_2,\\
\zeta_3 &= \frac{1}{(\pi^2 a)^3}\cdot\frac{1}{30}\tau_0^4(7\tau_2^2+4\tau_0\tau_4),\\
\zeta_4 &= \frac{1}{(\pi^2 a)^4}\cdot\frac{2}{4725}\tau_0^5(392\tau_2^3+609\tau_0\tau_2\tau_4+135\tau_0^2\tau_6),\\
\zeta_5 &= \frac{1}{(\pi^2 a)^5}\cdot\frac{2}{1\,488\,375}\tau_0^6(88\,396\tau_2^4+252\,672\tau_0\tau_2^2\tau_4+107\,055\tau_0^2\tau_2\tau_6+\\
&\qquad +46\,935\tau_0^2\tau_4^2+18\,900\tau_0^3\tau_8)
\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

liefert. Wenn wir die Potenzreihe (9) umkehren, so erhalten wir mit $\zeta = q^2$

$$\left.\begin{aligned}
U(q) = \frac{1}{\zeta_1}q^2 - \frac{\zeta_2}{\zeta_1^3}q^4 + \frac{2\zeta_2^2-\zeta_1\zeta_3}{\zeta_1^5}q^6 - \frac{5\zeta_2^3-5\zeta_1\zeta_2\zeta_3+\zeta_1^2\zeta_4}{\zeta_1^7}q^8 +\\
+\frac{14\zeta_2^4-21\zeta_1\zeta_2^2\zeta_3+6\zeta_1^2\zeta_2\zeta_4+3\zeta_1^2\zeta_3^2-\zeta_1^3\zeta_5}{\zeta_1^9}q^{10}-+\cdots.
\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

Hieraus folgt durch Ableitung nach q die Reihenentwicklung der Rückstellkraft $R(q)$ in der Form

$$R(q) = \frac{dU}{dq} = R_1 q - R_3 q^3 + R_5 q^5 - R_7 q^7 + R_9 q^9 - + \cdots, \qquad (14)$$

wobei die Koeffizienten $R_1, R_3, \ldots$ nach (13) in den ζ_i und diese nach (12) in den vorgegebenen Koeffizienten $\tau_0, \tau_2, \ldots$ der Reihenentwicklung (11) auszudrücken sind. Auf diesem Weg ergibt sich nach einiger Zwischenrechnung die Darstellung der ersten fünf Koeffizienten von $R(q)$, die wohl in den meisten Fällen ausreichen werden:

$$\left.\begin{aligned}
R_1 &= \frac{4\pi^2 a}{\tau_0^2},\\
R_3 &= \frac{32\pi^2 a}{3\tau_0^3}\tau_2,\\
R_5 &= \frac{16\pi^2 a}{15\tau_0^4}(19\tau_2^2-12\tau_0\tau_4),\\
R_7 &= \frac{256\pi^2 a}{1575\tau_0^5}(203\tau_2^3-294\tau_0\tau_2\tau_4+90\tau_0^2\tau_6),\\
R_9 &= \frac{64\pi^2 a}{297\,675\tau_0^6}(227\,801\tau_2^4-534\,408\tau_0\tau_2^2\tau_4+252\,180\tau_0^2\tau_2\tau_6+129\,780\tau_0^2\tau_4^2-\\
&\qquad -75\,600\tau_0^3\tau_8).
\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

Praktisch sind also einfach die gegebenen Koeffizienten $\tau_0, \tau_2, \tau_4, \ldots$ in die Gleichungen (15) einzusetzen, und wir erhalten hiermit unmittelbar die Koeffizienten $R_1, R_3, \ldots$ der gesuchten Reihenentwicklung (14) der Rückstellkraft nach Potenzen des Ausschlags q.

4. Die Schwingungsdauer ist durch eine Potenzreihe in Q vorgeschrieben. Um diesen gegenüber demjenigen von Ziff. 3 allgemeineren Fall behandeln zu können, müssen wir voraussetzen, daß sich T in Form einer nach Potenzen von $\sqrt{h}$ ansteigenden Reihe mit den Koeffizienten t_ν darstellen läßt:

$$T(h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} t_\nu h^{\nu/2}. \qquad (16)$$

Gehen wir hiermit in Gleichung (4) ein, so ergibt sich $\varphi(U)$ durch gliedweise Integration in der Form

$$q = \varphi(U) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi a}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)!}{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)!}t_\nu U^{\frac{\nu+1}{2}}. \qquad (17)$$

und es folgt gemäß (6) die Rückstellkraft $R(U)$ aus

$$\frac{1}{R(U)} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi a}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)!}{\left(\frac{\nu-1}{2}\right)!} t_\nu U^{\frac{\nu-1}{2}}. \tag{18}$$

Nun sei die Schwingungsdauer in der Form

$$T = \tau_0 + \tau_1 Q + \tau_2 Q^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n Q^n \tag{19}$$

vorgegeben. Setzt man in diese Reihe für $Q = \varphi(h)$ die Reihe (17) ein (in der also U durch h zu ersetzen ist), so erhält man wegen (16) die Beziehung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau_n \left[\frac{1}{2\sqrt{2\pi a}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)!}{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)!} t_\nu h^{\frac{\nu+1}{2}} \right]^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} t_\nu h^{\nu/2}. \tag{20}$$

Der weitere Gang der Rechnung ist jetzt folgender: Wir rechnen auf der linken Seite dieser Gleichung die n-ten Potenzen aus und ordnen die Reihenglieder nach Potenzen von $\sqrt{h}$. Dann lassen sich durch Vergleich gleicher Potenzen von $\sqrt{h}$ in (20) Rekursionsformeln gewinnen, die es ermöglichen, die Koeffizienten t_ν aus den gegebenen Koeffizienten $\tau_0, \tau_1, \ldots$ nacheinander zu berechnen. Mit den so gewonnenen Werten der t_ν gehen wir in die Gleichungen (17) und (18) ein und erhalten so den Zusammenhang zwischen der Rückstellkraft R und dem Ausschlag q in Form einer Parameterdarstellung mit U als Parameter.

Zur Abkürzung setzen wir vorübergehend

$$\left(\frac{1}{8\pi a}\right)^{n/2} \tau_n = \sigma_n, \quad \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)!}{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)!} t_\nu = s_\nu, \quad \sqrt{h} = \varkappa. \tag{21}$$

Dann geht (20) über in

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \varkappa^{\nu+1} \right)^n \sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)!}{\left(\frac{\nu}{2}\right)!} s_\nu \varkappa^\nu$$

oder, wenn wir ausmultiplizieren und dabei die Glieder bis $\varkappa^5$ berücksichtigen,

$$\begin{aligned}
&\sigma_0 + (s_0 + s_1\varkappa + s_2\varkappa^2 + s_3\varkappa^3 + s_4\varkappa^4 + \cdots)\varkappa\sigma_1 + \\
&\quad + [s_0^2 + 2 s_0 s_1 \varkappa + (2 s_0 s_2 + s_1^2)\varkappa^2 + 2(s_0 s_3 + s_1 s_2)\varkappa^3 + \cdots]\varkappa^2\sigma_2 + \\
&\quad + [s_0^3 + 3 s_0^2 s_1 \varkappa + 3 s_0 (s_0 s_2 + s_1^2)\varkappa^2 + \cdots]\varkappa^3\sigma_3 + \\
&\quad + (s_0^4 + 4 s_0^3 s_1 \varkappa + \cdots)\varkappa^4\sigma_4 + \\
&\quad + (s_0^5 + \cdots)\varkappa^5\sigma_5 + \cdots \quad = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)!}{\left(\frac{\nu}{2}\right)!} s_\nu \varkappa^\nu .
\end{aligned}$$

Der Vergleich der Koeffizienten gleicher Potenzen von $\varkappa$ ergibt die Rekursionsformeln

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\left(\frac{1}{2}\right)!}{0!} s_0 = \sigma_0, \quad \frac{1!}{\left(\frac{1}{2}\right)!} s_1 = s_0\sigma_1, \quad \frac{\left(\frac{3}{2}\right)!}{1!} s_2 = s_1\sigma_1 + s_0^2\sigma_2, \quad \frac{2!}{\left(\frac{3}{2}\right)!} s_3 = s_2\sigma_1 + 2 s_0 s_1 \sigma_2 + s_0^3\sigma_3, \\
&\frac{\left(\frac{5}{2}\right)!}{2!} s_4 = s_3\sigma_1 + (2 s_0 s_2 + s_1^2)\sigma_2 + 3 s_0^2 s_1 \sigma_3 + s_0^4\sigma_4, \\
&\frac{3!}{\left(\frac{5}{2}\right)!} s_5 = s_4\sigma_1 + 2(s_0 s_3 + s_1 s_2)\sigma_2 + 3 s_0 (s_0 s_2 + s_1^2)\sigma_3 + 4 s_0^3 s_1 \sigma_4 + s_0^5\sigma_5 .
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Setzen wir jeweils in die Gleichung für s_i ($i = 1, 2, \ldots, 5$) die Werte von $s_{i-1}, \ldots, s_0$ aus den vorangegangenen Gleichungen ein, so erhalten wir schließlich, wenn wir nach (21) wieder zu den ursprünglichen Bezeichnungen t_ν und τ_n zurückkehren,

$$\left.\begin{aligned}
t_0 &= \tau_0,\\
t_1 &= \frac{1}{\pi\sqrt{2\,a}}\,\tau_0\tau_1,\\
t_2 &= \frac{1}{8\,\pi\,a}\,\tau_0\left(\tau_1^2+\frac{4}{\pi}\,\tau_0\tau_2\right),\\
t_3 &= \frac{1}{12\,\pi^2\,a}\,\frac{1}{\sqrt{2\,a}}\,\tau_0\left[\tau_1^3+\left(3+\frac{4}{\pi}\right)\tau_0\tau_1\tau_2+\frac{6}{\pi}\,\tau_0^2\tau_3\right],\\
t_4 &= \frac{1}{64\,\pi^2\,a^2}\,\tau_0\left[\frac{1}{2}\,\tau_1^4+\left(\frac{5}{2}+\frac{22}{3\,\pi}\right)\tau_0\tau_1^2\tau_2+\frac{15}{\pi}\,\tau_0^2\tau_1\tau_3+\frac{64}{3\,\pi^2}\,\tau_0^2\tau_2^2+\frac{16}{\pi^2}\,\tau_0^3\tau_4\right],\\
t_5 &= \frac{1}{64\,\pi^3\,a^2}\,\frac{1}{\sqrt{2\,a}}\,\tau_0\left[\frac{4}{15}\,\tau_1^5+11\left(\frac{1}{3}+\frac{16}{45\,\pi}\right)\tau_0\tau_1^3\tau_2+\left(3+\frac{16}{\pi}\right)\tau_0^2\tau_1^2\tau_3+\right.\\
&\quad+\left(3+\frac{28}{3\,\pi}+\frac{512}{45\,\pi^2}\right)\tau_0^2\tau_1\tau_2^2+\frac{16}{\pi}\left(1+\frac{8}{15\,\pi}\right)\tau_0^3\tau_1\tau_4+\frac{2}{\pi}\left(3+\frac{16}{\pi}\right)\tau_0^3\tau_2\tau_3+\\
&\quad\left.+\frac{16}{\pi^3}\,\tau_0^4\tau_5\right].
\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

Mit diesen Werten von t_ν bilden wir nun gemäß (17) und (18) die Reihen für $q(U)$ und $1/R(U)$. Ihre ersten Glieder werden, wenn wir die Reihen in zwei nach ungeraden bzw. geraden Potenzen von $\sqrt{U}$ fortschreitende Teile aufspalten,

$$q(U)=\frac{1}{\sqrt{2\,a}}\left[\frac{1}{\pi}\sqrt{U}\left(t_0+\frac{2}{3}\,t_2U+\frac{8}{15}\,t_4U^2+\cdots\right)+\frac{1}{4}\,U\left(t_1+\frac{3}{4}\,t_3U+\frac{5}{8}\,t_5U^2+\cdots\right)\right],\qquad(24)$$

$$\frac{1}{R(U)}=\frac{1}{\sqrt{2\,a}}\left[\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{U}}\left(\frac{1}{2}\,t_0+t_2U+\frac{4}{3}\,t_4U^2+\cdots\right)+\frac{1}{4}\left(t_1+\frac{3}{2}\,t_3U+\frac{15}{8}\,t_5U^2+\cdots\right)\right].\qquad(25)$$

Zur praktischen Anwendung der Formeln haben wir somit lediglich aus den gegebenen Koeffizienten τ_i mittels der Gleichungen (23) die Größen t_i zu berechnen und in die Gleichungen (24) und (25) einzusetzen. Diese liefern dann die Parameterdarstellung für den Zusammenhang zwischen der Rückstellkraft R und dem Ausschlag q mit dem Potential U als Parameter.

5. Anwendungsbeispiele. Erstes Beispiel: Die Schwingungsdauer T sei als Funktion der Amplitude Q mit den positiven Konstanten T_0 und Q_0 in der Form

$$T(Q)=T_0\,\mathfrak{Cof}\,\frac{Q}{Q_0}$$

vorgegeben. Da die $\mathfrak{Cof}$-Funktion eine Reihendarstellung nach Potenzen von Q^2 zuläßt, empfiehlt sich die Anwendung des Verfahrens von Ziff. 3. Aus der Reihenentwicklung

$$T(Q)=T_0\left[1+\frac{1}{2!}\left(\frac{Q}{Q_0}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{Q}{Q_0}\right)^4+\cdots\right]$$

ergeben sich die ersten fünf Koeffizienten von (11) zu

$$\tau_0=T_0,\qquad \tau_2=\frac{1}{2}\,\frac{T_0}{Q_0^2},\qquad \tau_4=\frac{1}{24}\,\frac{T_0}{Q_0^4},\qquad \tau_6=\frac{1}{720}\,\frac{T_0}{Q_0^6},\qquad \tau_8=\frac{1}{40\,320}\,\frac{T_0}{Q_0^8}.$$

Gehen wir hiermit in die Gleichungen (15) ein, so erhalten wir

$$R_1=\frac{4\,\pi^2\,a}{T_0^2},\qquad R_3=\frac{4}{3}\,\frac{4\,\pi^2\,a}{T_0^2}\,\frac{1}{Q_0^2},\qquad R_5=\frac{17}{15}\,\frac{4\,\pi^2\,a}{T_0^2}\,\frac{1}{Q_0^4},$$

$$R_7=\frac{248}{315}\,\frac{4\,\pi^2\,a}{T_0^2}\,\frac{1}{Q_0^6},\qquad R_9=\frac{1382}{2835}\,\frac{4\,\pi^2\,a}{T_0^2}\,\frac{1}{Q_0^8},$$

und somit lautet mit (14) die Potenzreihendarstellung für die Rückstellkraft

$$R(q)=\frac{4\,\pi^2\,a\,Q_0}{T_0^2}\left[\frac{q}{Q_0}-\frac{4}{3}\left(\frac{q}{Q_0}\right)^3+\frac{17}{15}\left(\frac{q}{Q_0}\right)^5-\frac{248}{315}\left(\frac{q}{Q_0}\right)^7+\frac{1382}{2835}\left(\frac{q}{Q_0}\right)^9-+\cdots\right].$$

Die sich hieraus ergebende Kennlinie des Schwingers ist in dimensionsloser Darstellung mit $\xi=q/Q_0$, $\eta=RT_0^2/4\,\pi^2\,a\,Q_0$ in Abb. 1 wiedergegeben. Hierbei sind, um den Grad der Annäherung durch die ersten Reihenglieder beurteilen zu können, zwei Kurven gezeichnet. Die gestrichelte stellt die Näherung dar, welche die mit q^7 abgebrochene Reihe liefert, während in

der ausgezogenen Kurve auch noch das Glied mit q^9 berücksichtigt ist. Man erkennt, daß in dem Bereich, in dem die beiden Kurven praktisch übereinstimmen, die Kennlinie unterlinear wird, was ja bei einer mit der Amplitude monoton wachsenden Schwingungsdauer auch zu erwarten war.

Zweites Beispiel: Die Schwingungsdauer T sei als Funktion der Amplitude Q, wiederum mit Konstanten T_0 und Q_0, in der Form

$$T(Q) = \frac{T_0}{1 - \frac{Q}{Q_0}} \tag{26}$$

vorgegeben, wobei zunächst Q_0 positiv sei soll. Da sich diese Funktion durch eine geometrische Reihe nach Potenzen von Q entwickeln läßt, kommt hier nur das Verfahren von Ziff. 4 in Frage. Aus der Reihendarstellung

$$T(Q) = T_0\left[1 + \frac{Q}{Q_0} + \left(\frac{Q}{Q_0}\right)^2 + \left(\frac{Q}{Q_0}\right)^3 + \cdots\right]$$

ergeben sich die Koeffizienten von (19) zu

$$\tau_0 = T_0,\ \tau_1 = T_0/Q_0,\ \cdots,\ \tau_n = T_0/Q_0^n,\ \cdots$$

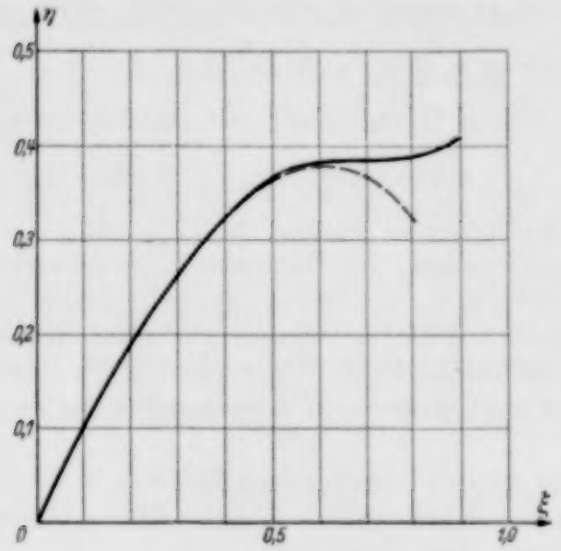

Abb. 1. Kennlinie zu $T = T_0 \operatorname{Col} \frac{Q}{Q_0}$.

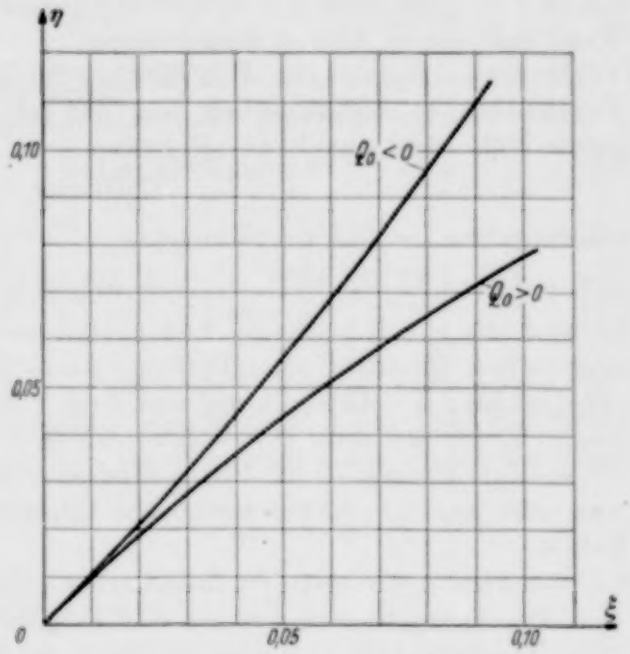

Abb. 2. Kennlinie zu $T = \frac{T_0}{1 - (Q/Q_0)}$.

Aus (23) berechnen wir jetzt zuerst die Hilfsgrößen t_i. Mit der aus den vorgegebenen Konstanten a, T_0 und Q_0 gebildeten Abkürzung

$$k = \frac{1}{\pi}\frac{T_0}{\sqrt{2\,a\,Q}}$$

werden diese

$$t_0 = T_0,\ t_1 = k\,T_0,\ t_2 = \frac{1}{4}(4+\pi)\,k^2\,T_0,\ t_3 = \frac{1}{3}(5+2\pi)\,k^3\,T_0,\ t_4 = \frac{1}{48}(112+67\pi+9\pi^2)\,k^4\,T_0,$$

$$t_5 = \frac{1}{720}(3056 + 2306\,\pi + 447\,\pi^2)\,k^5\,T_0.$$

Gehen wir hiermit in (24) ein, so erhalten wir

$$q(U) = \frac{T_0}{\sqrt{2\,a}}\left\{\frac{1}{\pi}\sqrt{U}\left[1 + \frac{1}{6}(4+\pi)\,k^2\,U + \frac{1}{90}(112 + 67\,\pi + 9\,\pi^2)\,k^4\,U^2 + \cdots\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\,U\left[k + \frac{1}{4}(5+2\,\pi)\,k^3\,U + \frac{1}{1152}(3056 + 2306\,\pi + 447\,\pi^2)\,k^5\,U^2 + \cdots\right]\right\}$$

oder, wenn wir eine dimensionslose Darstellung mit $\lambda = k\sqrt{U}$ als Parameter und mit $\xi = q/Q_0$ benützen,

$$\xi(\lambda) = \lambda\left(1 + \frac{\pi}{4}\,\lambda + \frac{4+\pi}{6}\,\lambda^2 + \pi\,\frac{5+2\,\pi}{16}\,\lambda^3 + \frac{112 + 67\,\pi + 9\,\pi^2}{90}\,\lambda^4 + \right.$$
$$\left. + \pi\,\frac{3056 + 2306\,\pi + 447\,\pi^2}{4608}\,\lambda^5 + \cdots\right). \tag{27}$$

Auf ähnliche Weise folgt dann aus (25) die dimensionslos gemachte Rückstellkraft $\eta = \frac{1}{2} k^2 Q_0 R = \tau_0^2 R / 4\pi^2 a Q_0$ zu

$$\eta(\lambda) = \frac{\lambda}{1 + \frac{\pi}{2}\lambda + \frac{4+\pi}{2}\lambda^2 + \pi\frac{5+2\pi}{4}\lambda^3 + \frac{112+67\pi+9\pi^2}{18}\lambda^4 + \pi\frac{3056+2306\pi+447\pi^2}{768}\lambda^5 + \cdots} . \quad (28)$$

Den Zusammenhang zwischen $\xi(\lambda)$ und $\eta(\lambda)$ und somit ein Bild der dimensionslos gemachten, wiederum unterlinearen Kennlinie des Schwingers gibt Abb. 2 wieder.

Ist Q_0 in (26) negativ, so ist wegen der Abnahme von T mit wachsendem Q eine überlinare Kennlinie zu erwarten. Da dann k und (bei positivem q und R) auch ξ und η negativ werden, erhalten wir die Kennlinie für diesen Fall wiederum im ersten Quadranten, wenn wir $\eta = k\sqrt{U}$ negative Werte annehmen lassen und in den Gleichungen (27) und (28) bei ξ und η, die jetzt durch $\xi = q/|Q_0|$ und $\eta = \tau_0^2 R / 4\pi^2 a |Q_0|$ zu ersetzen sind, die Vorzeichen umkehren. Auch diese Kennlinie ist in Abb. 2 eingetragen.

Drittes Beispiel: Die Meßergebnisse für die Schwingungsdauer T der Unruhe einer Taschenuhr in Abhängigkeit von der im Bogenmaß gemessenen Amplitude Q lassen sich in guter Näherung durch das Polynom

$$T(Q) = \tau_0 + \tau_2 Q^2 + \tau_4 Q^4 + \tau_6 Q^6 \quad (29)$$

wiedergeben, wobei (in Sekunden)

$$\tau_0 = 0{,}4 - 487{,}8 \cdot 10^{-6},\ \tau_2 = +185{,}46 \cdot 10^{-6},\ \tau_4 = -8{,}300 \cdot 10^{-6},\ \tau_6 = +0{,}1056 \cdot 10^{-6} \quad (30)$$

ist und alle τ_i mit höherem Index verschwinden. Auch hier ist wieder, da $T(Q)$ nur gerade Potenzen von Q enthält, das Verfahren von Ziff. 3 anzuwenden. Im Unterschied zum ersten Beispiel ist hier die Abweichung von dem „Sollwert" 0,4 sek für die Schwingungsdauer im ganzen Bereich, der sich von $Q = 0$ bis etwa $Q = 4{,}5$ erstreckt, äußerst gering. (Sie spielt jedoch für die Ganggenauigkeit der Uhr trotzdem schon eine erhebliche Rolle.) Wir werden also auch eine nur sehr geringe Abweichung der Kennlinie der Unruhefeder von der Geraden zu erwarten haben.

Berechnen wir mit den Zahlwerten (30) die R_i gemäß (15) und gehen hiermit in Gleichung (14) ein, so ergibt sich das auf das Trägheitsmoment a der Unruhe bezogene Rückstellmoment R in Abhängigkeit von dem im Bogenmaß gemessenen Ausschlag q zu

$$\frac{1}{a} R(q) = (247{,}343\,02\ q - 0{,}306\,19\ q^3 + 0{,}016\,714\ q^5 - 2{,}6780 \cdot 10^{-4}\ q^7 + 1{,}1180 \cdot 10^{-6} q^9 - + \cdots)\ \mathrm{sek}^{-2}.$$

Da in einem Diagramm für $R(q)$ die geringe Abweichung der Kennlinie von der Geraden nicht sichtbar würde, ist in Abb. 3 nicht $\frac{1}{a} R(q)$ selbst, sondern diese Abweichung

$$\frac{1}{a} \Delta R(q) = \left[\frac{1}{a} R(q) - 247{,}34302\ q\right] \mathrm{sek}^{-2}$$

wiedergegeben. Die gestrichelte Kurve entspricht wieder der mit dem Glied mit q^7 abgebrochenen Reihe.

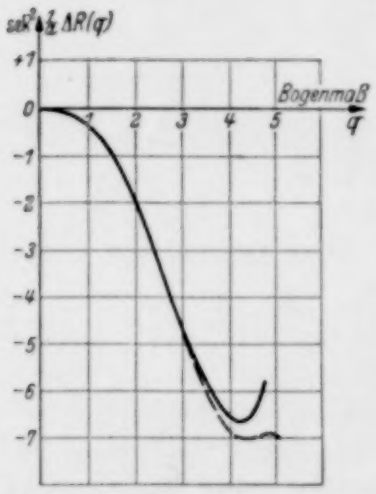

Abb. 3. Abweichung der Kennlinie vom linearen Verlauf bei der Unruhe einer Uhr.

6. Kontrolle der Genauigkeit der Lösung. Da es sich nicht immer leicht entscheiden läßt, welchen Grad der Genauigkeit wir durch Abbrechen der Reihenentwicklungen (14) bzw. (24) und (25) nach einem bestimmten Glied schon erreicht haben, dürfte eine Kontrolle des Ergebnisses erwünscht sein. Eine solche ist möglich, wenn wir mit Hilfe des berechneten Diagramms der Kennlinie die Gleichung (3) auswerten und uns überzeugen, ob der Wert von $T(Q)$, der sich hieraus ergibt, mit dem vorgeschriebenen Wert noch befriedigend übereinstimmt. Einen Weg, auf dem sich das uneigentliche Integral (3) mit verhältnismäßig geringem Aufwand berechnen läßt, hat *K. Klotter* gezeigt, und es sei hier auf dessen Darstellung verwiesen[1]. Die

[1] *K. Klotter*, Technische Schwingungslehre Bd. I, S. 152, 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1951.

Gleichung von *Klotter*, der eine Auswertung des geeignet umgeformten Integrals (3) nach der Simpsonschen Regel zugrundeliegt, läßt sich, wenn T als Potenzreihe in Q^2 vorgegeben ist, auch noch soweit umgestalten, daß wir eine Formel für $T(Q)$ erhalten, in welche wir die gemäß (15) berechneten Koeffizienten $R_1, R_3, \ldots$ der Potenzreihenentwicklung von $R(q)$ direkt einsetzen können. Da eine solche Darstellung in mancher Hinsicht bequem erscheint, sei sie hier hergeleitet, und zwar gleichzeitig mit einer Verschärfung des Ergebnisses von *Klotter*, die besonders dann von Nutzen sein dürfte, wenn, wie im dritten Beispiel, die Kennlinie nur wenig von der Geraden abweicht.

Wir gehen aus von der von *Klotter* aufgestellten Gleichung für $T(Q)$, die in unserer Schreibweise lautet

$$T(Q) = \frac{1}{3}\sqrt{2a}\,Q\left[\frac{1}{\sqrt{Q\,R(Q)}} + \frac{1}{\sqrt{U(Q) - U\left(\frac{15}{16}Q\right)}} + \frac{1}{\sqrt{U(Q) - U\left(\frac{3}{4}Q\right)}} + \frac{3}{\sqrt{U(Q) - U\left(\frac{7}{16}Q\right)}} + \frac{1}{\sqrt{U(Q)}}\right], \tag{31}$$

wobei wieder U das Potential der Rückstellkraft $R(q)$ gemäß (2) bedeutet. Ersetzen wir in (31) die unendliche Reihe (14) für $R(q)$ durch das tatsächlich berechnete Polynom

$$\overline{R}(q) = R_1 q - R_3 q^3 + R_5 q^5 - + \cdots + (-1)^n R_{2n+1} q^{2n+1}, \tag{32}$$

und entsprechend das Potential U durch das Polynom

$$\overline{U}(q) = \int_0^q \overline{R}(q)\,dq = \frac{1}{2} R_1 q^2 - \frac{1}{4} R_3 q^4 + \frac{1}{6} R_5 q^6 - + \cdots + \frac{(-1)^n}{2(n+1)} R_{2n+1} q^{2(n+1)}, \tag{33}$$

so erhalten wir an Stelle von $T(Q)$ den Wert $\overline{T}'(Q)$, dessen Abweichung von dem vorgeschriebenen Wert $T(Q)$ uns ein Maß für die Genauigkeit des Ansatzes $\overline{R}(q)$ für die Rückstellkraft liefert. Es ergibt sich, wenn wir in (33) für die Verwendung in den einzelnen Radikanden von (31) $q = Q, \frac{15}{16}Q, \frac{3}{4}Q$ und $\frac{17}{16}Q$ setzen und die Glieder ordnen,

$$\overline{T}'(Q) = \frac{1}{3}\sqrt{2a}\left(\frac{1}{\sqrt{W_0}} + \frac{1}{\sqrt{W_1}} + \frac{1}{\sqrt{W_2}} + \frac{3}{\sqrt{W_3}} + \frac{1}{\sqrt{W_4}}\right), \tag{34}$$

wobei wir für ein Polynom (32), das höchstens vom neunten Grad in q ist,

$$\left.\begin{aligned}
W_0 &= R_1 - R_3 Q^2 + R_5 Q^4 - R_7 Q^6 + R_9 Q^8, \\
W_1 &= 0{,}060\,5469\,R_1 - 0{,}056\,8809\,R_3 Q^2 + 0{,}053\,5110\,R_5 Q^4 - 0{,}050\,4101\,R_7 Q^6 + \\
&\qquad + 0{,}047\,5540\,R_9 Q^8, \\
W_2 &= 0{,}218\,7500\,R_1 - 0{,}170\,8984\,R_3 Q^2 + 0{,}137\,0036\,R_5 Q^4 - 0{,}112\,4859\,R_7 Q^6 + \\
&\qquad + 0{,}094\,3686\,R_9 Q^8, \\
W_3 &= 0{,}404\,2969\,R_1 - 0{,}240\,8409\,R_3 Q^2 + 0{,}165\,4979\,R_5 Q^4 - 0{,}127\,8322\,R_7 Q^6 + \\
&\qquad + 0{,}099\,9743\,R_9 Q^8, \\
W_4 &= \frac{1}{2} R_1 - \frac{1}{4} R_3 Q^2 + \frac{1}{6} R_5 Q^4 - \frac{1}{8} R_7 Q^6 + \frac{1}{10} R_9 Q^8
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

zu setzen haben. Für Polynome niedereren Grades werden die entsprechenden Koeffizienten R_{2n+1} einfach gleich Null.

Wenden wir diese Formel auf das dritte Beispiel der vorigen Ziffer an, so erhalten wir etwa für $Q^2 = 10$ den Wert $\overline{T}'(\sqrt{10}) = 0{,}400\,817$ sek, während nach (29) $T(\sqrt{10}) = 0{,}400\,642$ sek vorgeschrieben ist. Dieser in Anbetracht der geringen Abweichung der Kennlinie von der Geraden verhältnismäßig große Unterschied der beiden Werte rührt nun aber tatsächlich nicht davon her, daß das Näherungspolynom $\overline{R}(q)$ für $q = \sqrt{10}$ schon einen schlechten Wert liefern würde, sondern von der Ungenauigkeit der Formel (31), die ja nur eine Näherungsformel ist, da sie unter Verwendung der Simpsonschen Regel aufgestellt wurde. Es dürfte sich daher gerade für die Anwendung bei nur wenig von der Geraden abweichenden Kennlinien empfehlen, diese Formel durch ein Korrekturglied zu ergänzen. Dieses soll den Fehler, der dieser Formel schon bei der Anwendung auf eine gerade Kennlinie anhaftet und der hier den Hauptanteil des Gesamtfehlers ausmachen dürfte, berücksichtigen. Zu diesem Zweck gehen wir aus von der ge-

raden Kennlinie

$$\overline{R}(q) = R_1 q$$

und setzen demgemäß in (35) alle R_{2n+1} außer R_1 gleich Null. Dann liefert (34) den Wert

$$\overline{T}'(Q) = 6{,}285\,920 \sqrt{\frac{a}{R_1}} = \text{const},$$

während ja für den linearen Schwinger bekanntlich

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{R_1}}$$

herauskommen müßte. Der Fehler beträgt demnach

$$\delta \overline{T} = \overline{T}' - T = 0{,}002\,735 \sqrt{\frac{a}{R_1}}.$$

Der Wert $\overline{T}'(Q)$ nach (34) wird also für wenig von der Geraden abweichende Kennlinien verbessert, wenn wir ihn durch

$$\overline{T}(Q) = \overline{T}'(Q) - \delta T = \overline{T}'(Q) - 0{,}002\,735 \sqrt{\frac{a}{R_1}}$$

ersetzen. Im Fall unseres Zahlenbeispiels wird so die Korrektur

$$\delta \overline{T} = 0{,}000\,174 \text{ sek}$$

und daher der verbesserte Wert

$$\overline{T}(\sqrt{10}) = (0{,}400\,817 - 0{,}000\,174) \text{ sek} = 0{,}400\,643 \text{ sek};$$

dieser stimmt bis auf eine Einheit der sechsten Dezimale mit dem Wert von $T(\sqrt{10})$ überein. Für $Q^2 = 20$ erhält man auf demselben Weg $\overline{T}(\sqrt{20}) = 0{,}400\,726$ sek an Stelle von $T(\sqrt{20}) = 0{,}400\,746$ sek. Das Näherungspolynom für $R(q)$ liefert also hier ein zu kleines $\overline{T}$; d. h. die Unruhefeder ist nicht ganz so steif, wie dies die Näherungsformel angibt, und tatsächlich würde auch das nicht mehr berücksichtigte Glied mit q^{11} negativ werden.

7. Eine Lösung in geschlossener Form. Zum Schluß wollen wir noch für sich den Fall untersuchen, daß die Schwingungsdauer T eine lineare Funktion des Ausschlags q ist:

$$T(Q) = \tau_0 + \tau_1 Q,$$

wobei τ_0 und zunächst auch τ_1 positiv sein sollen. Gleichung (20) lautet dann wegen $\tau_i = 0$ für $i \geq 2$:

$$\tau_0 + \tau_1 \frac{1}{2\sqrt{2\pi a}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)!}{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)!} t_\nu h^{\frac{\nu+1}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} t_\nu h^{\nu/2}.$$

Der Vergleich der Koeffizienten gleicher Potenzen von $\sqrt{h}$ ergibt $t_0 = \tau_0$ und für $\nu \geq 1$ die Rekursionsformel für die t_ν

$$t_\nu = \tau_1 \frac{1}{2\sqrt{2\pi a}} \frac{\left(\frac{\nu-1}{2}\right)!}{\left(\frac{\nu}{2}\right)!} t_{\nu-1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Wenden wir diese Formel ν-mal hintereinander an, so läßt sich t_ν auf $t_0 = \tau_0$ zurückführen. Es heben sich dann alle Fakultäten bis auf $\left(\frac{\nu}{2}\right)!$ im Nenner und $0! = 1$ im Zähler fort, und wir erhalten

$$t_\nu = \frac{1}{\left(\frac{\nu}{2}\right)!} \frac{\tau_0}{(8\pi a)^{\nu/2}} \tau_1^\nu \tau_0,$$

und diese Gleichung gilt auch für $\nu = 0$. Gehen wir hiermit in (17) ein, so folgt

$$q = \varphi(U) = \tau_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)!} \frac{1}{(8\pi a)^{\frac{\nu+1}{2}}} \tau_1^\nu U^{\frac{\nu+1}{2}}$$

oder, falls wir die dimensionslose Größe

$$z = \frac{\tau_1^2}{8\,\pi\,a}\,U$$

einführen,

$$\varphi\,(z) = \frac{\tau_0}{\tau_1}\sum_{\nu=0}^{\infty}{}'\frac{1}{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)!}\,z^{\frac{\nu+1}{2}}\,.$$

Die Funktion $\varphi\,(z)$ spalten wir jetzt auf in eine Reihe mit ungeraden und eine mit geraden ν:

$$\varphi\,(z) = \varphi_1\,(z) + \varphi_2\,(z)\,.$$

Hierbei wird

$$\varphi_1\,(z) = \frac{\tau_0}{\tau_1}\sum_{\varkappa=1}^{\infty}{}'\frac{1}{\varkappa\,!}\,z^{\varkappa} = \frac{\tau_0}{\tau_1}\,(e^z - 1)$$

und

$$\varphi_2\,(z) = \frac{\tau_0}{\tau_1}\sum_{\lambda=0}^{\infty}{}'\frac{1}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)!}\,z^{\lambda+\frac{1}{2}}\,.$$

Da

$$\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\cdots\frac{2\lambda+1}{2}$$

ist, läßt sich $\varphi_2\,(z)$ auch in der Form

$$\varphi_2\,(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\tau_0}{\tau_1}\,\sqrt{z}\left(1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}\,z + \frac{1}{\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}}\,z^2 + \frac{1}{\frac{3}{5}\,\frac{5}{2}\,\frac{7}{2}}\,z^3 + \cdots\right)$$

schreiben. Der Ausdruck in der Klammer rechts ist[1] nun aber die Reihenentwicklung der konfluenten hypergeometrischen Funktion $M\left(1, \frac{3}{2}, z\right)$, so daß

$$\varphi\,(z) = \frac{\tau_0}{\tau_1}\left[e^z + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\sqrt{z}\,M\left(1, \frac{3}{2}, z\right) - 1\right]$$

wird. Um zur Berechnung der Rückstellkraft gemäß (6) die Ableitung

$$\frac{d\varphi}{dU} = \frac{\tau_1^2}{8\,\pi\,a}\,\frac{d\varphi}{dz}$$

zu bilden, berücksichtigen wir, daß

$$\frac{d}{dz}\,M\left(1, \frac{3}{2}, z\right) = \frac{1}{z}\left[\left(z - \frac{1}{2}\right)M\left(1, \frac{3}{2}, z\right) + \frac{1}{2}\right]$$

ist und erhalten

$$\frac{d\varphi}{dU} = \frac{\tau_0\,\tau_1}{8\,\pi\,a}\left[e^z + \frac{2}{\pi}\,\sqrt{z}\,M\left(1, \frac{3}{2}, z\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{z}}\right].$$

Mittels der Hilfsfunktion

$$\psi\,(z) \equiv e^z + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\sqrt{z}\,M\left(1, \frac{3}{2}, z\right) \tag{36}$$

ergibt sich so schließlich der Zusammenhang zwischen $R = 1/(d\varphi/dU)$ und $q = \varphi\,(z)$ mit z als Parameter in der Form

$$q\,(z) = \frac{\tau_0}{\tau_1}\,[\psi\,(z) - 1]\,, \qquad R\,(z) = \frac{8\,\pi\,a}{\tau_0\,\tau_1}\,\frac{1}{\psi\,(z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{z}}}\,. \tag{37}$$

Zur numerischen Auswertung sei noch bemerkt, daß für große z (d. h. praktisch schon für $z = 3$), wie aus der Theorie der konfluenten hypergeometrischen Funktionen hervorgeht, die asymptotische Darstellung

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\sqrt{z}\,M\left(1, \frac{3}{2}, z\right) \approx e^z \qquad (z > 3) \tag{38}$$

[1] In der Schreibweise von *Jahnke-Emde*, Tafeln höherer Funktionen, S. 271, 4. Aufl. Leipzig 1948.

gilt, so daß man also $\psi(z) \approx 2\,e^z$ setzen kann. Da für große z dann auch im Nenner des Ausdrucks (37) für $R(z)$ der zweite Summand gegenüber $\psi(z)$ vernachlässigbar wird, läßt sich $\psi(z)$ aus den beiden Gleichungen eliminieren, und wir erhalten die Rückstellkraft R direkt als Funktion des Ausschlags in der Form

$$R(q) \approx \frac{8\pi a}{\tau_1}\frac{1}{\tau_0 + \tau_1 q} = \frac{8\pi a}{\tau_1}\frac{1}{T(q)} \qquad \text{(für große } z\text{)}.$$

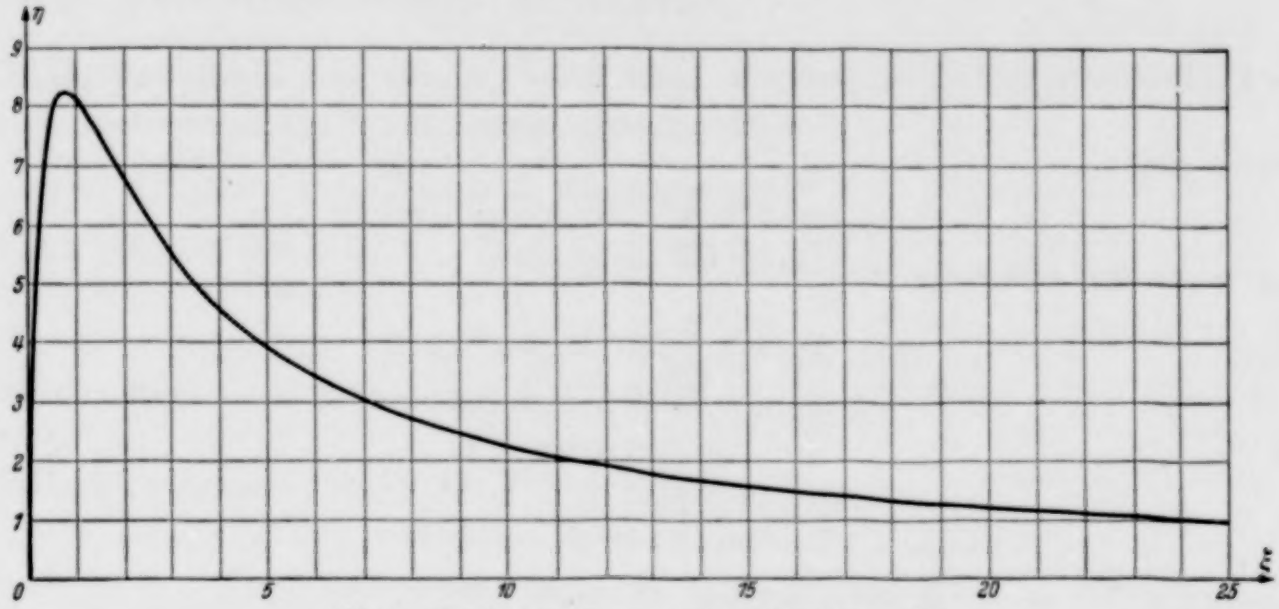

Abb. 4a. Kennlinie zu $T = \tau_0 + \tau_1 Q$. Verlauf im Großen.

Der Verlauf der Rückstellkraft als Funktion von q ist in dimensionsloser Form für die Veränderlichen $\xi = \tau_1 q/\tau_0$ und $\eta = \tau_1 R/8\pi a$ in den Abbildungen 4a und 4b dargestellt; Abbildung 4b gibt das Diagramm für kleine ξ-Werte wieder. Die Steigung im Nullpunkt ist $(d\eta/d\xi)_0 = 4\pi^2$.

Seither wurde τ_1 als positive Konstante vorausgesetzt. Für negative τ_1 (also für eine mit wachsender Amplitude abnehmende Schwingungsdauer) läßt sich die Rechnung in analoger Weise durchführen; wir haben dann lediglich in (36) und (37) für $\sqrt{z}$ den negativen Zahlwert einzusetzen. Wollen wir jedoch auch für diesen Fall das positive Vorzeichen von $\sqrt{z}$ beibehalten, so sind die Gleichungen (36) und (37) entsprechend umzuformen. Sie nehmen dann mit einer Hilfsfunktion $\overline{\psi}(z)$ an Stelle von $\psi(z)$ folgende Gestalt an:

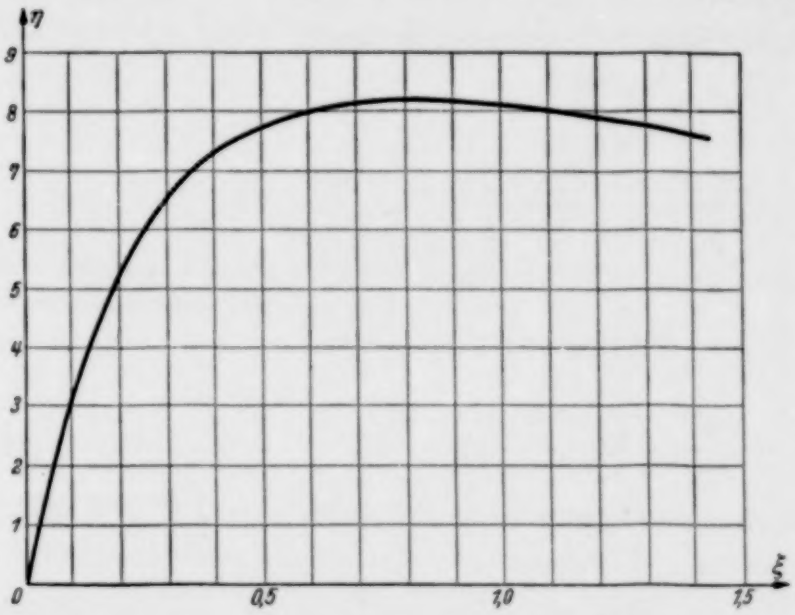

Abb. 4b. Kennlinie zu $T = \tau_0 + \tau_1 Q$. Verlauf für kleine ξ.

$$\overline{\psi}(z) \equiv e^z - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{z}\,M\left(1, \frac{3}{2}, z\right),$$

$$q(z) = \frac{\tau_0}{|\tau_1|}\left[1 - \overline{\psi}(z)\right], \qquad (\tau_1 < 0)$$

$$R(z) = \frac{8\pi a}{\tau_0 |\tau_1|}\,\frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{z}} - \overline{\psi}(z)}.$$

Mit wachsendem z muß wegen (38) $\overline{\psi}(z)$ gegen Null gehen; dann geht aber $q(z)$ gegen $\tau_0/|\tau_1|$ und $R(z)$ gegen Unendlich. Wir erhalten also eine sehr rasch steiler werdende Kennlinie, welche die Gerade $q = \tau_0/|\tau_1|$ zur Asymptote hat. Jenseits dieser Asymptote liegende Punkte sind ohne Interesse, da für $Q > \tau_0/|\tau_1|$ die Schwingungsdauer bei negativem τ_1 selbst negativ werden müßte.

(Eingegangen am 25. September 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dozent Dr. *H. Kauderer*, Stuttgart-N, Viergiebelweg 11.

Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs. Ausgewählte Kapitel aus der Elastomechanik. Von Prof. Dr.-Ing. W. Flügge, Stanford (USA), Prof. Dr.-Ing. Dr. R. Grammel, Stuttgart, Prof. Dr.-Ing. K. Klotter, Karlsruhe, Prof. Dr.-Ing. K. Marguerre, Darmstadt, Prof. Dr. G. Mesmer, Darmstadt. Herausgegeben von **K. Marguerre**, Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule Darmstadt. Mit 120 Figuren. VIII, 253 Seiten Gr.-8°. 1950. Ganzleinen DM 25.50

Stabilitätsprobleme der Elastostatik. Von Dr.-Ing. habil. **Alf Pflüger**, Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 389 Abbildungen. VIII, 339 Seiten Gr.-8°. 1950. Ganzleinen DM 34.50

Fachwerk und Rahmenwerk. Ein systematischer Grundriß der Statik des ebenen Tragwerkes. Von Dr.-Ing. **Walter Fries.** Mit 365 Bildern. X, 368 Seiten Gr.-8°. 1953. Ganzleinen DM 42.—

Statik der Tragwerke. Von Dr.-Ing. habil. **Walther Kaufmann**, o. Professor an der Technischen Hochschule München. (Handbibliothek für Bauingenieure. Ein Hand- und Nachschlagebuch für Studium und Praxis. Begründet von Robert Otzen, IV. Teil, 1. Band.) Dritte, ergänzte und verbesserte Auflage. Mit 364 Abbildungen. VIII, 314 Seiten Gr.-8°. 1949. DM 25.50; Ganzleinen 28.—

Dynamik des Bogenträgers und Kreisringes. Von Dr. **Karl Federhofer**, Professor an der Technischen Hochschule Graz. Mit 35 Textabbildungen und 26 Zahlentafeln. XII, 179 Seiten Gr.-8°. 1950. (Springer-Verlag, Wien.) Steif geheftet DM 23.—

Einflußfelder elastischer Platten. Von Dipl.-Ing. Prof. Dr. techn. **Adolf Pucher**, Graz. Mit 10 Textabbildungen und 52 Tafeln. VIII, 13 Seiten 23,5 × 31 cm. 1951. (Springer-Verlag, Wien.) Ganzleinen 27.70

Die Eigenschaften des Betons. Versuchsergebnisse und Erfahrungen zur Herstellung und Beurteilung des Betons. Von **Otto Graf**, o. Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart, Direktor des Instituts für Bauforschung und des Instituts für technische Holzforschung. Mit 359 Abbildungen und 63 Zahlentafeln. XII, 318 Seiten Gr.-8°. 1950. Ganzleinen DM 36.—

Die Temperaturverteilung im Beton. Von Dr.-Ing. habil. **Kurt Hirschfeld**, o. Professor an der Technischen Hochschule Aachen. Mit 173 Abbildungen im Text und in einem Anhang sowie 15 Zahlentafeln. IV, 154 Seiten 4°. 1948. DM 36.—

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Gleitlager. Von Dr. phil. **E. Schmid,** o. Professor und Vorstand des II. Physikalischen Instituts der Universität Wien, ausw. wissensch. Mitglied d. Max-Planck-Inst. f. Metallforschung, Stuttgart, und Dr.-Ing. **R. Weber,** technisch-wissenschaftlicher Mitarbeiter im Metall-Laboratorium der Metallgesellschaft A.G. Frankfurt/Main. Mit 212 Abbildungen. VII, 394 Seiten Gr.-8°. 1953. Ganzleinen DM 45.—

Technische Hydro- und Aeromechanik. Von Dr.-Ing. habil. **Walther Kaufmann,** o. Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule in München. Mit 254 Abbildungen. VIII, 352 Seiten Gr.-8°. 1954. Ganzleinen DM 36.—

Grundlagen der Aeromechanik und Flugmechanik. Von Dr.-Ing. **Arthur Pröll,** Professor i. R. an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 278 Textabbildungen. XVI, 612 Seiten Gr.-8°. 1951. (Springer-Verlag, Wien.) Ganzleinen DM 48.—

Einführung in die theoretische Gasdynamik. Von Dr. **Robert Sauer,** o. Professor für Mathematik und analytische Mechanik an der Technischen Hochschule München. Zweite Auflage. Mit 107 Abbildungen. VIII, 174 Seiten Gr.-8°. 1951. DM 16.50

Gasdynamik. Von Dr. **Klaus Oswatitsch,** Dozent an der Königl. Technischen Hochschule in Stockholm, früherer wissenschaftlicher Mitarbeiter am Kaiser-Wilhelm-(Max-Planck-)Institut für Strömungsforschung in Göttingen. Mit 300 Textabbildungen und 3 Tafeln. XIII, 456 Seiten Gr.-8°. 1952. (Springer-Verlag, Wien.) Ganzleinen DM 78.—

Das Schaufelrad im Modellversuch. Zwei Berichte der Schiffbautechnischen Versuchsanstalt Wien. Von Dr.-Ing. **Friedrich Gebers.** Mit einem Beitrag von Prof. Dr.-Ing. e. h. Dr.-Ing. Fritz Horn. Mit 59 Abbildungen im Text und auf 50 Tafeln. X, 61 Seiten 4°. 1952. (Springer-Verlag, Wien.) Steif geheftet DM 30.—

Strömungsmaschinen. Von Dr.-Ing., Dr.-Ing. eh. **Carl Pfleiderer,** Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig. Mit 200 Abbildungen. XII, 383 Seiten Gr.-8°. 1952. Ganzleinen DM 36.—

Technische Schwingungslehre. Von Dr.-Ing. **Karl Klotter,** o. Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe. Zweite, umgearbeitete und ergänzte Auflage.

Erster Band: **Einfache Schwinger und Schwingungsmeßgeräte.** Mit 360 Abbildungen. XVI, 399 Seiten Gr.-8°. 1951. Ganzleinen DM 46.50

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegen 1 Prospekt des Springer-Verlages, Berlin·Göttingen·Heidelberg und 1 Prospekt des Springer-Verlages, Wien, bei.

Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany. 57275 4022 0,85 K.B./Z. 040